

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

GENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON L. COLLATZ · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · K. KLOTTER
K. MARGUERRE · H. NEUBER · L. SCHMETTERER · K. SCHRÖDER · H. SCHUBERT
W. TOLLMIEHN · H. UNGER UND C. WEBER · HERAUSGEGEBEN VON H. HEINRICH, DRESDEN

BAND 41

SEITE 397—476

HEFT 10/11

OKTOBER/NOVEMBER 1961

AUS DEM INHALT:

V O R T R Ä G E

H. Künzi: Der heutige Stand in der Theorie der nichtlinearen Programmierung / **E. Stiefel:** Altes und Neues über numerische Quadratur

H A U P T A U F S Ä T Z E

M.M. Stanišić and R.M. McKinley: On the Vibration of Trapezoidal Plate Clamped along Each Edge with Damping Considered / **I. Babuška und J. Kautský:** Ein Beitrag zur Theorie der Kerbspannungen / **W. Uhlmann:** Über harmonische und isotrope stochastische Prozesse mit Fehler-schätzung für ein Differenzenverfahren / **W. Werner:** Instabilität stoßfreier transsonischer Profilströmungen

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

EINGEGANGENE BÜCHER

N A C H R I C H T E N



AKADEMIE-VERLAG GMBH · BERLIN

Heinrich

INHALT:

Seite

Vorträge

- H. P. Künzi: Der heutige Stand in der Theorie der nicht-linearen Programmierung 397
E. Stiefel: Altes und Neues über numerische Quadratur 408

Hauptaufsätze

- M. M. Stanišić and R. M. McKinley: On the Vibration of Trapezoidal Plate Clamped along Each Edge with Damping Considered 414
I. Babuška und J. Kautsky: Ein Beitrag zur Theorie der Kerbspannungen 420
W. Uhlmann: Über harmonische und isotrope stochastische Prozesse mit Fehlerschätzung für ein Differenzenverfahren 428
W. Werner: Instabilität stoßfreier transsonischer Profilstömungen 448

Kleine Mitteilungen

- W. Szablewski: Rayleighs Modell kleiner Störungen eines ruhenden Mediums 459
R. P. Kanwal: Intrinsic Equations of Magnetogasdynamics 462
F. Reutter und E. Haupt: Zur nomographischen Darstellbarkeit gewisser Funktionensysteme 463
E. Vincze: Über die geometrische Herleitung einer Resolvente der biquadratischen Gleichung 464
F. Krückeberg: Die numerischen Werte einer B_2 -Folge der Additiven Zahlentheorie 465

Buchbesprechungen 466

Eingegangene Bücher 476

Nachrichten 476

Wir bitten, alle Manuskriptsendungen direkt an den Herausgeber, Prof. Dr.-Ing. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31, zu richten. Zu den Arbeiten, die als Hauptaufsätze bestimmt sind, erbitten wir auf gesondertem Blatt eine kurze Zusammenfassung des Inhalts, nach Möglichkeit in deutscher, englischer und russischer Sprache; falls die Übersetzungen nicht geliefert werden können, ist wenigstens die Angabe spezieller Fachausdrücke in den verschiedenen Sprachen erwünscht. Die Arbeiten sollen in klarer Schrift, möglichst mit Schreibmaschine, zeitweilig und einseitig geschrieben sein und die nötigen Hinweise für den Setzer betreffend Schrifttypen (z. B. griechisch, Fraktur), Sperrungen o. a. enthalten. Zur Beschleunigung des Drucks und zur Vermeidung von Satzfehlern empfiehlt es sich, umfangreiche und unübersichtliche Formelausdrücke durch Einführung von Abkürzungen zu vermeiden. Bilder sollen als Tuschzeichnungen auf Transparentpapier (Beschriftung mit Bleistift) oder als saubere Bleistiftskizzen ausgeführt sein. Bildunterschriften sind am Schluß des Textes anzufügen. Sollte die Arbeit bereits an anderer Stelle verbreitet sein (als Dissertation, Forschungsbericht, Manuskriptdruck o. ä.), so ist dies auf der ersten Textseite in einer Fußnote anzugeben. Für die Zusammenstellung der zitierten Literatur, am Schluß der Arbeit, bitten wir, sich einer einheitlichen Notation entsprechend folgendem Muster zu bedienen, z. B. W. Schmiedler, Über die Wärmespannungen in einem Körper, ZAMM 28 (1948), S. 54—59 oder G. Bürgermeister und H. Steup, Stabilitätstheorie I, 1. Aufl., Berlin 1957, Akademie-Verlag, S. 142—147. Die Autoren erhalten von den Hauptaufätzen 75, von den Kleinen Mitteilungen 25 Sonderdrucke ohne Berechnung, darüber hinaus bis zu 250 Sonderdrucke gegen Berechnung.

Der Verlag behält sich für alle Beiträge das Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung vor.

Band 1—7 erschien innerhalb der Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik

Ab Band 8 lautet der Reihentitel

SCHRIFTENREIHE DER INSTITUTE FÜR MATHEMATIK

BEI DER DEUTSCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

und wird herausgegeben von

Prof. Dr. Heinrich Grell, Prof. Dr. Josef Naas, Prof. Dr. Achilles Papapetrou, Prof. Dr. Hans Reichardt, Prof. Dr. Willi Rinow, Prof. Dr. Erhard Schmidt und Prof. Dr. Kurt Schröder

Der Begriff des Raumes in der Geometrie

Bericht von der Riemann-Tagung des Forschungsinstituts für Mathematik. Mit Beiträgen von 28 Autoren, herausgegeben von Prof. Dr. J. NAAS und Prof. Dr. KURT SCHRÖDER

1957. VIII, 317 Seiten — 22 Abbildungen — 9 Tafeln — gr. 8° — DM 38,— (vergriffen)

Lösung des allgemeinen Randwertproblems für eindimensionale gedämpfte Wellen bei harmonischem Zeitgesetz

Von Dr. KARL BORKMANN und SIEGFRIED OBERLÄNDER

1955. 99 Seiten — gr. 8° — DM 12,— (vergriffen)

Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen

Von A. W. POGORELOW

(Übersetzung aus dem Russischen)

Wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. J. NAAS

1956. 79 Seiten — gr. 8° — DM 5,50

Bemerkungen über die Stabilitätsuntersuchungen der Wirbelstraßen

Von Prof. Dr. BL. DOLAPTSCHIEW

1957. 28 Seiten — gr. 8° — DM 3,80

Die Verbiegung konvexer Flächen

Von A. W. POGORELOW

(Übersetzung aus dem Russischen)

Wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. E. REMBS

1957. 135 Seiten — 26 Abbildungen — gr. 8° — DM 18,50

Einführung in die Theorie stationärer Zufallsfunktionen

Von Prof. A. M. JAGLOM

(Übersetzung aus dem Russischen)

Deutsche Übersetzung unter wissenschaftlicher Redaktion von Dr. HERBERT GOERING

1959. VIII, 177 Seiten — 8 Abbildungen — gr. 8° — DM 24,—

Tabellen von Exponentialfunktionen und -integralen zur Anwendung auf Gebieten der Thermodynamik, Halbleitertheorie und Gaskinetik

Von SIEGFRIED OBERLÄNDER

1959. VIII, 8 Seiten Text — 142 Tabellenseiten — 1 Abbildung — gr. 8° — Ganzleinen DM 35,— (vergriffen)

Konstruktion ganzer, rationaler und reeller Ordinalzahlen und die diskontinuierliche Struktur der transfiniten reellen Zahlenräume

Von Dr. DIETER KLAUA

1961. 141 Seiten — gr. 8° — DM 28,—

Über eine Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik

Von Dr. HERBERT BENZ

1961. 149 Seiten — 5 Abbildungen — gr. 8° — DM 29,50

Qualitative Methoden beim n -Körperproblem der Himmelsmechanik

Von Prof. H. F. CHILMI

(Übersetzung aus dem Russischen; vom Autor durchgesehene und ergänzte Übersetzung. In deutscher Sprache herausgegeben von Dr. J. O. FLECKENSTEIN)

1961. 116 Seiten — 4 Abbildungen — 1 Tabelle — gr. 8° — DM 23,—

Fordern Sie bitte unseren Fachkatalog MATHEMATIK an, der Ihnen kostenlos geliefert wird.

AKADEMIE - VERLAG - BERLIN

Der heutige Stand in der Theorie der nichtlinearen Programmierung^{*)}

Von HANS P. KÜNZI

Einleitung

Beim mathematischen Programmieren — handle es sich um lineares oder nichtlineares Programmieren — kann man stets zwei verschiedene Standpunkte einnehmen; nämlich den mehr praktischen oder dann den theoretischen. Für den ersteren interessiert sich vorwiegend der Wirtschafts- und der Betriebswissenschaftler, für den zweiten natürlich der angewandte Mathematiker.

Wir wollen uns heute ausschließlich der zweiten Gruppe anschließen und somit die nicht-lineare Programmierung, insbesondere die quadratische, als Teilgebiet der angewandten Mathematik betrachten.

Dieser soeben erwähnte Zweig des mathematischen Programmierens gehört bestimmt zu den jüngsten Forschungssektoren innerhalb unserer Wissenschaft. Doch hat sich dieser in den letzten drei bis vier Jahren derart gewaltig entwickelt, daß es heut schon nicht mehr ganz einfach ist, das Gesamtgebiet global zu überblicken.

Da die nichtlineare Programmierung, besonders vom praktischen Standpunkt aus gesehen, eine immer größere Bedeutung erlangt, so habe ich zusammen mit W. KRELLE versucht, in einer systematischen Darstellung die verschiedenen Methoden so zu beleuchten, daß sie zugleich dem Mathematiker, wie auch dem Praktiker besser zugänglich werden. Dabei ging es uns in erster Linie darum, die zahlreichen Verfahren, die wir verschiedentlich auch mathematisch ergänzen konnten, zur Diskussion zu stellen. Denn ohne Zweifel muß gesagt werden, daß in dieser Richtung noch gewaltige Forschungsarbeit geleistet werden kann und muß.

Damit wir von Anfang an die gleiche Sprache reden, so möchte ich einleitend einiges in terminologischer wie auch in theoretischer Richtung über die lineare Programmierung erwähnen.

2. Betrachtungen zur linearen Programmierung

Bei der linearen Programmierung handelt es sich bekanntlich um das folgende Problem: Gesucht werden die Größen x_1, x_2, \dots, x_g , für die der lineare Ausdruck

$$Q = \sum_{i=1}^g p_i x_i \quad \dots \dots \dots (1)$$

maximal wird, unter Berücksichtigung der m Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^g a_{ji} x_i \leq s_i \quad (j = 1, \dots, m) \quad \dots \dots \dots (2), \quad (I)$$

sowie der g weiteren Restriktionen

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, g) \quad \dots \dots \dots (3).$$

Im ganzen haben wir also $g + m$ Bedingungen an die g Variablen zu stellen.

^{*)} Inhalt eines Hauptvortrages, den der Verfasser auf Einladung der Tagungsleitung auf der wissenschaftlichen Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik gehalten hat, die vom 4. bis 8. April 1961 in Würzburg stattfand.

Die duale Minimumaufgabe verlangt die Minimierung von

$$K = \sum_{j=1}^m s_j w_j \quad (j = 1, \dots, m) \dots \dots \dots (1a)$$

während gleichzeitig die Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^m a_{ji} w_j \geq p_i \quad (i = 1, \dots, g) \dots \dots \dots (2a)$$

und

$$w_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m) \dots \dots \dots (3a)$$

erfüllt sein müssen.

Das zentrale Dualitätsprinzip sagt bekanntlich aus, daß am Optimalpunkt

$$K = Q$$

gelten muß.

Für die folgenden Betrachtungen wenden wir uns wieder ausschließlich der Maximumaufgabe zu.

Bekanntlich ist es einfacher, mit Gleichungen als mit Ungleichungen zu rechnen. Aus diesem Grunde führt man in (2) sogenannte Schlupfvariable ein, nämlich für jede Restriktion eine und bezeichnet diese durch

$$x_{g+1}, x_{g+2}, \dots, x_{g+m},$$

die ebenfalls nicht-negativ sein müssen.

Insgesamt ist nun die Zahl der Variablen auf $g + m = n$ angewachsen, und wir können das Problem nochmals schreiben unter Zuhilfenahme der Vektor- und Matrizenschreibweise:

Man maximiere

$$Q = p' x \dots \dots \dots (4)$$

unter den linearen Nebenbedingungen

$$A x = s \dots \dots \dots (5)$$

und

$$x \geq 0$$

Hier ist p' ein Zeilenvektor von n Elementen, nämlich

$$p' = (p_1, p_2, \dots, p_g, p_{g+1}, \dots, p_{g+m} = p_n)$$

mit

$$p_{g+1} = p_{g+2} = \dots = p_n = 0.$$

x und s sind Kolonnenvektoren mit n bzw. m Elementen und A ist eine $(n \cdot m)$ -Matrix, gegeben durch:

$$A = [a_{ij} \mid I].$$

Unter einer gewöhnlichen Lösung des L.P.-Problems versteht man irgend eine Anzahl von Variablen, die nicht unbedingt positiv sein müssen, die aber die Restriktionen (2) erfüllen. Meint man hingegen die Lösung des eigentlichen L.P.-Problems, so spricht man von der Schluslösung oder der optimalen Lösung. Eine Lösung, welche aus lauter nicht-negativen Variablen besteht, heißt zulässig (feasible) und eine Lösung, welche zulässig ist und aus nicht mehr als m positiven Variablen besteht ($m = \text{Anzahl der Restriktionen}$), wird als Basislösung bezeichnet.

Man kann beweisen, daß, wenn ein System zulässige Lösungen hat, es dann auch Basislösungen aufweist. Wenn eine Basislösung weniger als m positive Variable besitzt, so heißt sie degeneriert.

Um Lösungen unseres Problems zu bestimmen, müssen wir nochmals festhalten, daß wir es in (5) mit einem Gleichungssystem von m Gleichungen zu tun haben in n Unbekannten ($n = m + g$). Um das System zu lösen, können $g = n - m$ Unbekannte beliebig vorbestimmt werden. Das System (5) kann dann für die restlichen m Unbekannten gelöst werden.

Ohne näher auf Beweise einzugehen, sei hier lediglich das zentrale Theorem der L.P. angegeben:

An der Stelle, an der Q ein Maximum annimmt, müssen die $g = n - m$ vorbestimmten Variablen null sein.

Diese grundlegende Überlegung läuft mathematisch darauf hinaus, daß das System der linearen Ungleichungen (2) und (3) ein konvexes Polyeder bildet, über dem eine lineare Funktion ihr Maximum in einer Ecke annimmt.

Es gibt heutzutage verschiedene Verfahren, um L.P. zu lösen, aber ich kann an dieser Stelle nicht näher auf diese eingehen, vielmehr möchte ich mich auf einige geometrische und methodische Betrachtungen beschränken.

a) Die Simplexmethode

Bei diesem bekannten Verfahren, das wir in erster Linie G. B. DANTZIG verdanken, startet man mit einer Basislösung, die geometrisch mit einer Ecke des Polyeders zusammenfällt. Von dieser Ecke aus bewegt man sich längs einer Kante in eine benachbarte Ecke, indem man durch ein geschicktes Auswahlverfahren diese Kante so wählt, daß sich durch die Verschiebung der zu optimierende Ausdruck Q vergrößert beim Maximumproblem (bzw. verkleinert beim Minimumproblem). Das Simplexverfahren gibt in übersichtlicher Weise alle notwendigen Regeln des Algorithmus an und sorgt dafür, daß man auf einem möglichst günstigen Weg zum Optimum gelangt. Für die Simplexmethode existieren auch ausführliche Flußdiagramme für die elektronische Computerberechnung.

b) Gradientenmethode

Bei den verschiedenen Gradientenmethoden kann man in einem beliebigen Punkt beginnen, so auch im Innern des Bereiches und bewegt sich bestmöglichst in Richtung des steilsten Anstieges unter Berücksichtigung der vorhandenen Restriktionen (wir werden bei der Nichtlinearen Programmierung nochmals auf diesen Fall zurückkommen).

Nach einem Vorschlag von R. FRISCH z. B. bewegt man sich im zweidimensionalen Fall vom Startpunkt aus zuerst senkrecht zur Schar der Hyperflächen, die durch die zu maximierende Funktion Q aufgespannt werden, in Richtung steigender Q (beim Maximumproblem), bis man an die Grenze des zulässigen Bereiches kommt. Dieser Randpunkt ist die erste Näherung. Von dort aus geht man wieder in Richtung der Q -Hyperebenen in das Innere des zulässigen Bereiches bis an dessen andere Grenze, halbiert diesen Abstand und schreitet von diesem Halbierungspunkt wie zu Anfang wieder senkrecht zur Schar der Hyperebenen Q bis man die Grenze von neuem erreicht usw. usw.

Es wäre interessant, an dieser Stelle auch auf einige praktische Anwendungen hinzuweisen, wie dies S. VAJDA in seiner umfangreichen Sammlung von Beispielen tat. Wir wollen uns aber hier damit begnügen, das unter (I) formulierte Problem als eine Produktionsplanung aufzufassen. Dabei könnte eine Firma g Produkte fabrizieren in den Mengen x_1, x_2, \dots, x_g mit den Nettopreisen p_1, p_2, \dots, p_g . Für die Produktion benötigt man m nicht in beliebiger Menge vorhandene Produktionsfaktoren (Arbeitskräfte, Maschinen usw.) und zwar pro Stück des i -ten Produktes die Menge a_{ji} . Die Produktionsfaktoren stehen nur bis zu den Höchstmengen s_j zur Verfügung. Gefragt wird nach dem Produktionsprogramm, das den Erlös optimiert.

Man erkennt sofort, daß die Lösung des Problems (I) diese Produktionsplanung löst.

Nun sind aber in sehr vielen Fällen die Preise p_i von der Nachfrage x_i abhängig, wodurch die Zielfunktion Q aufhört, linear zu sein, so daß man sich aus rein praktischen Überlegungen gezwungen sieht, sich mit der sogenannten Nichtlinearen Programmierung zu befassen.

3. Die Grundlagen der nichtlinearen (quadratischen) Programmierung

Das allgemeinste nichtlineare Programm lautet:

Man maximiere die Funktion

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{unter den } m \text{ Restriktionen} \\ \text{und} \end{array} \right\} \begin{array}{l} g_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, g) \end{array} \quad \text{(III).}$$

Für dieses Problem in einer derart allgemeinen Fassung hat man heute aber noch keine geschlossenen Lösungsmethoden, so daß wir uns im folgenden vorwiegend mit dem spezielleren Typus der quadratischen Programmierung mit linearen Nebenbedingungen befassen, für den man zum Teil über recht gute Verfahren verfügt.

Die Grundaufgabe der quadratischen Programmierung mit linearen Nebenbedingungen formulieren wir hier für das Minimumproblem:

Man suche Größen x_1, x_2, \dots, x_g derart, daß die quadratische Form

$$Q = \sum_{i=1}^g p_i x_i + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g c_{ji} x_j x_i \quad \dots \dots \dots (6)$$

zum Minimum wird, unter Erfüllung der linearen Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^g a_{ji} x_i \leq s_j \quad (j = 1, \dots, m) \quad \dots \dots \dots (7)$$

und

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, g)$$

(IV).

In Programm (IV) sind die a_{ji} , s_j , c_{ji} und p_i beliebig vorgegebene Zahlen. Allerdings soll o. B. d. A. gelten, daß $c_{ji} = c_{ij}$ ist. Für $c_{ji} \equiv 0$ hat man den Fall der Linearen Programmierung.

Falls bei einem in der Praxis auftretenden Programm die Zielfunktion nicht minimiert, sondern maximiert werden soll, oder falls in einigen Restriktionen statt des Zeichens \leq das Zeichen \geq steht, so kann man ein solches Programm immer auf die Grundform (IV) bringen, indem man die Zielfunktion, bzw. die aus der Reihe fallenden Ungleichungen mit -1 durchmultipliziert.

Bisher haben wir an die quadratische Form, die durch die c_{ij} gegeben wird, lediglich die triviale Forderung der Symmetrie gestellt. Leider liegt auch für dieses allgemeine quadratische Programm heute noch keine befriedigende Lösungsmethode vor. Wir müssen zusätzlich noch die wichtige Einschränkung hinnehmen, daß die quadratische Form der Zielfunktion konvex ist (dies bedeutet, daß die Matrix der c_{ij} positiv definit oder semidefinit ausfällt).

Diese Forderung gelte in Zukunft stets, durch sie wird sichergestellt, daß jedes lokale Minimum zugleich ein globales Minimum ist, und daß man dadurch die Lösung eines solchen Programms durch lokale Kriterien ermitteln kann. Diese gestellte Forderung über die Koeffizienten c_{ij} ist zwar mathematisch sehr einschränkend, doch zeigt die Erfahrung, daß sie bei vielen praktischen Beispielen erfüllt wird.

Für den zweidimensionalen Fall läßt sich das Programm (IV) graphisch darstellen (Bild 1). Im streng konvexen Fall bilden dann die Niveaulinien gleicher Q -Werte eine Ellipsenschar. Das gemeinsame Zentrum x^0 bildet das absolute Minimum.

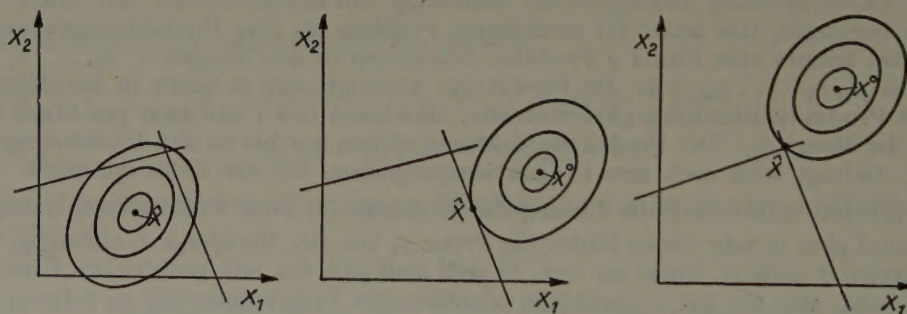


Bild 1

Man erkennt sofort den Unterschied zur linearen Programmierung, wo am Optimalpunkt \hat{x} genau g der $m + g$ Ungleichungen in Gleichungsform erfüllt sind, während dies bei der quadratischen Programmierung für höchstens g der $m + g$ Ungleichungen der Fall ist.

Wie im linearen Fall, so ist es auch hier sinnvoll, die Ungleichungen durch m zusätzliche Schlupfvariable in Gleichungen überzuführen und das Programm IV abgekürzt zu schreiben: Man minimiere

$$Q = p' x + x' C x \quad \dots \dots \dots (8)$$

unter den Nebenbedingungen

$$A x = s$$

und

$$x \geq 0$$

(V).

Dabei ist p' analog zu Programm (II) ein Zeilenvektor mit $g + m = n$ Komponenten. x und s sind Spaltenvektoren mit n bzw. m Komponenten.

A hat die Form einer $(m \cdot n)$ -Matrix, nämlich:

$$A = [a_{ji} \mid I].$$

C ist eine symmetrische $(n \cdot n)$ -Matrix:

$$C = \begin{bmatrix} c_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Das Kuhn-Tucker-Theorem

Wir wenden uns nun dem zentralen Theorem von KUHN-TUCKER zu, das eine Verallgemeinerung der klassischen Multiplikatorenmethode von LAGRANGE zur Bestimmung von Extremstellen unter Nebenbedingungen darstellt, für den Fall, daß die Nebenbedingungen nicht nur Gleichungen, sondern auch Ungleichungen enthalten und daß die Variablen vorzeichenbeschränkt sind.

Wir wollen hier das Theorem etwas allgemeiner betrachten, als dies für die quadratische Programmierung nötig wäre. Auf Beweise müssen wir verzichten.

Wir gehen aus vom Programm (III) und verlangen:

Es seien $f(x)$ und $g_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$) konvexe differenzierbare Funktionen, die von den n Variablen $x' = (x_1, \dots, x_n)$ abhängen.

Das Problem lautet jetzt:

Man minimiere

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \\ g_j(x) \leq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \text{ unter den Nebenbedingungen (VI).}$$

Das Theorem von KUHN-TUCKER gibt nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein bestimmtes \hat{x} eine Lösung des Problems VI darstellt. Die Kriterien beziehen sich dabei auf eine sogenannte verallgemeinerte LAGRANGE-Funktion Φ . Um diese Funktion zu bilden, führt man m neue Variable u_1, \dots, u_m ein, die sogenannten LAGRANGE-Multiplikatoren, die wir in einem u -Vektor zusammenfassen. Φ wird dann eine Funktion der $m + n$ Variablen (x, u) nach der Vorschrift:

$$\Phi(x, u) = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(x).$$

Die Aussage des Theorems lautet jetzt:

Ein Vektor \hat{x} stellt dann und nur dann eine Lösung des Problems (VI) dar, wenn er zusammen mit einem Vektor u folgende Bedingungen erfüllt:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_{\hat{x}, \hat{u}} \geq 0 \quad \dots \dots \dots 1,$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_{\hat{x}, \hat{u}} \hat{x}_i = 0 \quad \dots \dots \dots 2,$$

oder

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_{\hat{x}, \hat{u}} \cdot \hat{x}_i = 0 \quad \dots \dots \dots 2',$$

$$\hat{x}_i \geq 0 \quad \dots \dots \dots 3.$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \right)_{\hat{x}, \hat{u}} \leq 0 \quad \dots \dots \dots 4.$$

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \right)_{\hat{x}, \hat{u}} \hat{u}_j = 0 \quad \dots \dots \dots 5,$$

oder

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \right)_{\hat{x}, \hat{u}} \cdot \hat{u}_j = 0 \quad \dots \dots \dots 5',$$

$$\hat{u}_j \geq 0 \quad \dots \dots \dots 6.$$

In den Formeln 1 bis 6 laufen die Indices für i stets von 1 bis n , diejenigen für j von 1 bis m . Auch erkennt man sofort, daß 2 und 2' bzw. 5 und 5' gleichwertig sind.

Alle sechs Bedingungen besagen anschaulich nichts anderes, als daß \hat{x} und \hat{u} einen Sattelpunkt für Φ ergeben müssen unter den Nebenbedingungen $x \geq 0$, $u \geq 0$, d. h. es muß gelten:

$$\begin{aligned} & \Phi(\hat{x}, \hat{u}) \leq \Phi(x, \hat{u}) && \text{für alle } x \geq 0 \\ \text{und} & \Phi(\hat{x}, \hat{u}) \geq \Phi(\hat{x}, u) && \text{für alle } u \geq 0, \\ \text{wobei} & \hat{x} \geq 0 && \text{und } \hat{u} \geq 0. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Die Funktion $\Phi(x, u)$ muß in (\hat{x}, \hat{u}) ein Minimum hinsichtlich x und ein Maximum hinsichtlich u aufweisen.

Man kann sich sehr leicht klar machen, daß diese letzte Forderung wieder auf die Bedingungen 1 bis 6 führt.

Zusammenfassend besteht der wesentliche Sinn der Multiplikatoren-Methode darin, daß man durch Einführung neuer Variablen u , ein Minimax-Problem für Φ aufstellen kann, bei dem die Nebenbedingungen nur noch in Vorzeichenbeschränkungen der Variablen besteht. Löst man das Minimax-Problem (die Bedingungen 1 bis 6 geben dazu die notwendigen und hinreichenden Kriterien), so ist der x -Teil der Lösung zugleich eine Lösung des Minimum-Problems (VI).

Wendet man die KUHN-TUCKER-Bedingungen auf das quadratische Programm (V) an, so erhält man:

Ein Vektor \hat{x} stellt dann und nur dann eine Lösung des Problems (V) dar, wenn er mit den Vektoren \hat{u} und \hat{v} ($v = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$) folgende Bedingungen erfüllt:

$$\hat{v} \geq 0; \quad \hat{v}' \hat{x} = 0; \quad \hat{x} \geq 0; \quad A \hat{x} - s = 0,$$

wozu noch die Definitionsgleichung für \hat{v} kommt, nämlich:

$$p + 2 C \hat{x} + A' \hat{u} - \hat{v} = 0.$$

Der Vektor u ist hier nicht mehr vorzeichenbeschränkt, weil die Restriktionen in (V) durch Gleichungen gegeben sind.

Im zweiten Hauptteil dieses Vortrages wollen wir nun dazu übergehen, einige Techniken der quadratischen Programmierung näher zu beleuchten, ohne wiederum näher auf Beweis und Konvergenzbetrachtungen einzugehen. Auch wird keine Vollständigkeit angestrebt, sondern es sollen lediglich die wichtigen und interessanten Verfahren eine kurze Würdigung erfahren.

5. Das Verfahren von Hildreth

HILDRETH hat ein asymptotisches Lösungsverfahren gegeben, das sich sehr eng an die KUHN-TUCKER-Relationen anschließt. Von der quadratischen Form wird Definitheit verlangt, was natürlich die Allgemeinheit etwas einengt, doch zeichnet sich die Methode dadurch aus, daß sie sehr einfach zu handhaben ist:

Man maximiere

$$Q(x) = d'x + x' C x$$

unter den Restriktionen

$$Gx \geq h.$$

Hier sei also C negativ definit mit der Dimension $(n \cdot n)$. Die obigen Restriktionen enthalten auch allfällige Vorzeichenbeschränkungen, so daß G eine $(m + n \cdot n)$ -Matrix angibt.

Wendet man die KUHN-TUCKER-Bedingungen für eine Lösung (\hat{u}, \hat{x}) an, so ergeben die notwendigen und hinreichenden Relationen:

$$2 C \hat{x} + d + G' \hat{u} = 0,$$

$$G \hat{x} - h \geq 0,$$

$$\hat{u}' (G \hat{x} - h) = 0,$$

$$\hat{u} \geq 0.$$

Da C negativ definit ist, so kann man aus der ersten Gleichung \hat{x} ausrechnen und diesen Wert in den beiden folgenden Relationen substituieren. Setzt man noch zur Abkürzung für

$$A = -1/4 G C^{-1} G', \\ b = -1/2 G C^{-1} d - h,$$

so erhält man

$$2 A \hat{u} + b \geq 0, \\ \hat{u}' (2 A \hat{u} + b) = 0, \\ \hat{u} \geq 0.$$

Die drei letzten Relationen geben gerade die KUHN-TUCKER-Bedingungen für das folgende Dualsystem:

Man minimiere

$$\varphi(u) = u' A u + b' u$$

mit den Nebenbedingungen

$$u \geq 0.$$

Durch die obige Transformation ist es gelungen, ein Programm aufzustellen, bei dem die Restriktionen nur noch in der Vorzeichenbeschränkung von u liegen. HILDRETH startet jetzt mit einem beliebigen zulässigen Punkt, etwa $u^0 = 0$. Die Komponenten des nächsten Iterationsschrittes u^1 erhält man, indem man $\varphi(u)$ der Reihe nach hinsichtlich jeder der Komponenten u^i minimiert, unter der Zusatzbedingung, daß $u_i \geq 0$ sein muß, wobei alle übrigen Komponenten den zuletzt festgesetzten Wert beibehalten. Man kann beweisen, daß dieses iterative Verfahren gegen den Optimalwert konvergiert.

6. Das Verfahren von Wolfe

Auch WOLFE startet mit den KUHN-TUCKER-Relationen, benützt aber weitgehend den Simplex-Algorithmus, wodurch es ihm gelingt, in endlich vielen Schritten das Optimum zu erreichen. Weiter ist WOLFE nur an semidefinite Formen gebunden:

Um

$$Q(x) = p' x + x' C x$$

zu minimieren, wenn zudem die Relationen

$$A x = s, \\ x \geq 0$$

erfüllt sein sollen, wird nach KUHN-TUCKER das Gleichungssystem gebildet:

$$A x = s,$$

$$2 C x - v + A' u = -p$$

mit $x \geq 0, v \geq 0, v' x = 0$ (u unbeschränkt).

Wir haben es hier mit $m + n$ Gleichungen in $2n + m$ Variablen zu tun. Wegen $v_i x_i = 0$ müssen mindestens n der Variablen 0 werden ($n = \text{Anzahl der Variablen minus Anzahl der Gleichungen}$). Eine solche Lösung heißt wiederum eine Basislösung.

WOLFE sucht nun eine Basislösung des Systems und will diese mit der Simplexmethode verbessern. Um eine solche Basislösung zu finden, führt man weitere Variable ein, nämlich:

$$w' = (w_1, \dots, w_m); \quad z^1 = (z_1^1, \dots, z_n^1); \quad z^2 = (z_1^2, \dots, z_n^2)$$

und erweitert das ursprüngliche System zu

$$A x + w = s; \quad 2 C x - v + A' u + z^1 - z^2 = -p$$

mit

$$x \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, z^1 \geq 0, z^2 \geq 0, v_i x_i = 0.$$

Jetzt haben wir $m + n$ Gleichungen in $4n + 2m$ Variablen. Eine Basislösung muß demzufolge $3n + m$ verschwindende Variable aufweisen. Eine solche kann man jetzt sofort angeben durch

$$x = 0, \quad v = 0, \quad u = 0 \quad \text{und} \quad z_i^1 \quad \text{oder} \quad z_i^2 \quad \text{gleich null.}$$

Die erste Basis lautet also:

$$w_j = s_j, \quad z_i^1 = -p_i \quad (\text{wenn } p_i \text{ negativ}), \quad z_i^2 = -p_i \quad (\text{wenn } p_i \text{ positiv}).$$

Als Optimumsbedingung setzt man jetzt:

$$\sum w_i \Rightarrow \text{Min.}$$

Das obige Minimum wird auf alle Fälle bei 0 erreicht.

Hat man dieses gefunden, so startet man mit der 2. Phase, indem man ausgehend von der Schlußlösung der 1. Phase den Ausdruck

$$\sum z_i \Rightarrow \text{Min}$$

sucht. Man zeigt, daß für positiv definite C der obige Optimumsausdruck unter der Bedingung $v'x = 0$ auf 0 reduziert werden kann, womit die ursprüngliche Lösung gefunden ist. Falls C nur semidefinit ist, braucht WOLFE noch eine dritte Runde, die dann wiederum mit Hilfe der Simplexmethode zum endgültigen Ziel führt.

7. Das Verfahren von Barankin und Dorfman

Dieses Verfahren arbeitet ganz entsprechend wie dasjenige von WOLFE, stammt doch der ursprüngliche Ansatz auch von BARANKIN und DORFMAN. Die wesentliche Abweichung gegenüber WOLFE besteht darin, daß die Forderung $v'x = 0$ anfänglich nicht exakt erfüllt wird, sondern erst nach gewissen Simplexiterationen. Leider gibt es aber Fälle, bei denen die Methode von BARANKIN und DORFMAN nicht zur gesuchten Optimallösung konvergiert.

8. Das Verfahren von Beale

Ebenfalls ein sehr wirkungsvolles Verfahren, das den semidefiniten Fall mit einschließt und sich eng an den Simplex-Algorithmus anlehnt, wenn auch nicht so stark wie bei WOLFE, stammt vom Engländer BEALE.

Auch er minimiert eine konvexe quadratische Funktion $Q(x_1, \dots, x_n)$ unter den linearen Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = s_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

mit

$$x_i \geq 0.$$

BEALE bestimmt zuerst eine Basislösung, bei der mindestens $n - m$ Variable verschwinden. Diese bestimmt man aus dem System der gegebenen Restriktionen und substituiert diese in der Zielfunktion, so daß dort nachher nur noch Nichtbasisvariable \bar{x}_h vorkommen, d. h.

$$Q = Q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-m}).$$

Falls wir am ersten Versuchspunkt für alle \bar{x}_h finden: $\frac{\partial Q}{\partial x} \geq 0$, so sind wir am Ziel. Ist für ein x_h aber: $\frac{\partial Q}{\partial x} < 0$, so kann man Q weiter verkleinern. Dies erfolgt nun genau gleich wie beim Simplexverfahren. Die Variablen \bar{x}_h läßt man solange anwachsen, bis eine frühere Basisvariable 0 wird. Damit entsteht eine neue Basis, durch die der Wert der Zielfunktion verbessert wird. Bei der quadratischen Programmierung kann aber die Ableitung $\partial Q / \partial \bar{x}$ verschwinden, bevor beim Anwachsen von \bar{x}_h eine frühere Basisvariable 0 wird. In diesem Fall führt man eine neue nicht vorzeichenbeschränkte Variable u ein, gegeben durch $u = \partial Q / \partial x$. Man wählt nun als neuen Versuchspunkt in diesem Falle denjenigen Ort, an dem u gleich 0 wird und fährt wiederum mit den Simplexbetrachtungen weiter. Das Verfahren von BEALE braucht i. a. recht wenig Iterationsschritte und wird in Zukunft sicher eine wichtige Rolle spielen.

9. Das Verfahren von Houthakker (Kapazitätsmethode)

Diese gehört zu den neuesten Methoden, die aber nicht gleich allgemein sind wie die soeben geschilderten.

Gesucht wird ebenfalls die Optimierung einer Zielfunktion unter linearen Restriktionen. Die Methode ist parametrisch und iterativ. Auch sie führt bei einer definiten Form in endlich vielen Schritten zur Lösung. Die Grundidee besteht darin, daß eine der Restriktionen in Form einer Kapazitätsbeschränkung auftreten muß durch:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \beta^*.$$

Beim Algorithmus wird nun die Kapazität β als variabel angesehen, indem man das Rechenverfahren mit $\beta = 0$ startet. In diesem Fall besteht der zulässige Bereich nur aus dem

Nullpunkt. Wenn man nun β anwachsen läßt, so bilden die Lösungen des abgeänderten Programms:

$$\text{Max} \left\{ Q(x) \mid x_i \geq 0, \quad a'_j x \leq b_j, \quad \sum_{i=1}^n x_i \leq \beta \right\}$$

eine stetige stückweise lineare Kurve. Die Lösungen, die zu einem bestimmten β gehören, bezeichnet man mit $x(\beta)$. Man erhält auf diese Weise eine sukzessive Folge von β_g , bei denen die Kurve ihre Richtung ändert. Von einem bestimmten β_g -Wert an bleiben die $\hat{x}(\beta)$ konstant, da jetzt die Kapazitätsrestriktion die Lösung nicht mehr beeinflusst und man ist am Ziel.

Zu jedem Wert β bezeichnet man mit $\Gamma(\beta)$ die Menge, für die $\hat{x}_i(\beta) > 0$ und mit $\Delta(\beta)$ die Indexmenge j , für die $a_j \hat{x}(\beta) = b_j$ ausfällt. Zwischen zwei kritischen Werten von β bleibt Γ und Δ konstant.

Das Verfahren von HOUTHAKKER besteht nun darin, nacheinander die kritischen Werte β_g und die dazugehörigen Mengen Γ_g und Δ_g zu bestimmen. Dabei ist die Rekursionsvorschrift zur Bestimmung dieser Größen recht einfach. Aus ihnen werden dann wiederum die $\hat{x}(\beta)$ berechnet.

10. Das Verfahren von Theil und van de Panne

Das Verfahren von THEIL und VAN DE PANNE zeigt eine gewisse Ähnlichkeit mit dem aus der linearen Programmierung bekannten Methode der vollständigen Beschreibung von MORZKIN, RAIFFA und THALL. Bei dieser Methode bestimmt man alle Basislösungen und scheidet nach gewissen Kriterien systematisch alle aus, bis man diejenige trifft, die die Zielfunktion maximiert.

Im quadratischen Fall mit definiter Matrix bestimmt man zuerst das freie Maximum von $Q(x)$ ohne Nebenbedingungen. Wenn dieses nicht im zulässigen Bereich liegt, so weiß man, daß am Optimalpunkt eine oder mehrere der Ungleichungen in Gleichungsform erfüllt sein müssen:

THEIL und VAN DE PANNE geben nun ein sehr ökonomisches Verfahren, nach welchem man die Indexmenge $\{S\}$ bestimmt, für welche die Ungleichungen in Gleichungsform gegeben sind.

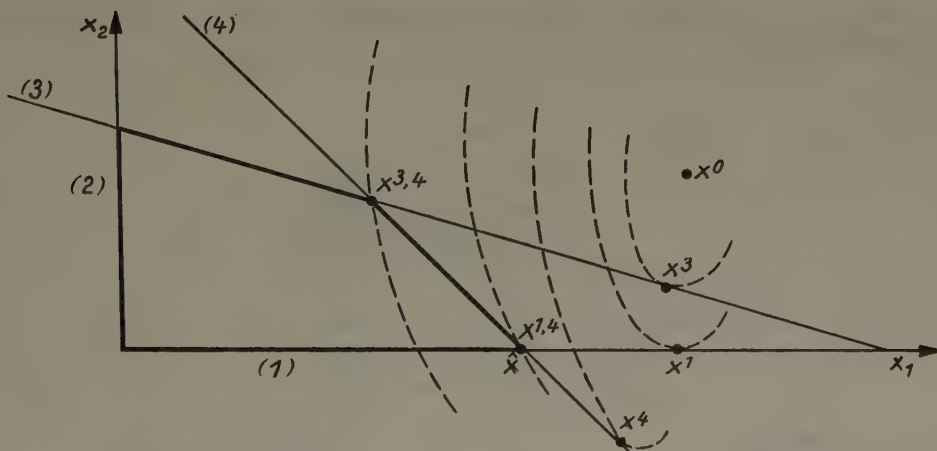


Bild 2

Nach KUHN und TUCKER erhält man die folgende Auswahlregel: Ein x^s , das keine Nebenbedingungen verletzt, stellt dann und nur dann die Endlösung \hat{x} dar, wenn x^{s-h} die h -te Nebenbedingung verletzt. (Unter x^s versteht man die Lösung des Programms mit $a_j x = b_j$ für $j \in S$). Nach Bild 2 ist $\hat{x} = x^{1,4}$ Lösung, weil x^1 die vierte und x^4 die erste Restriktion verletzt.

11. Die Gradientenverfahren von Frisch, Rosen und Zoutendijk

Obschon auch die meisten der früheren Verfahren gewissermaßen Gradientenverfahren darstellen, so bezeichnet man in der Literatur die drei obigen Methoden als Gradientenverfahren im eigentlichen Sinne, weil sie für die einzelnen Bewegungen jeweils die Gradientenrichtungen bestimmen, um dadurch den günstigsten Anstieg zu ermitteln.

Betrachtet man die verschiedenen Verfahren, so stellt man fest, daß bei allen das Vorgehen gewisse Ähnlichkeiten aufweist. Nehmen wir nochmals eine konkave Zielfunktion, die in einem Bereich R zu maximieren sei, gegeben durch:

$$a'_j x \leq b_j,$$

so setzt man voraus, daß die Funktion $Q(x)$ einen stetigen Gradienten in R aufweist.

Wir beschränken uns hier auf die Verfahren mit langen Schritten. Man startet mit einem beliebigen Punkt x^0 , der auf dem Rande oder im Innern von R liegt. Um dann vom k -ten Iterationspunkt x^k zu x^{k+1} zu gelangen, bestimmt man in x^k eine Richtung s^k derart, daß für genügend kleine $\lambda > 0$ der Strahl $x^k + \lambda s^k$ noch in R liegt. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß

$$a_j' s^k \leq 0 \quad \text{für alle } j \text{ mit} \quad a_j' x^k = b_j.$$

Eine solche Richtung heißt zulässig. Ferner muß der Q -Wert längs des Strahles für kleine λ wenigstens anwachsen, was die Bedingung

$$s^{k'} g(x^k) > 0$$

liefert.

Ein solches s^k bezeichnet man als brauchbar (Bild 3).

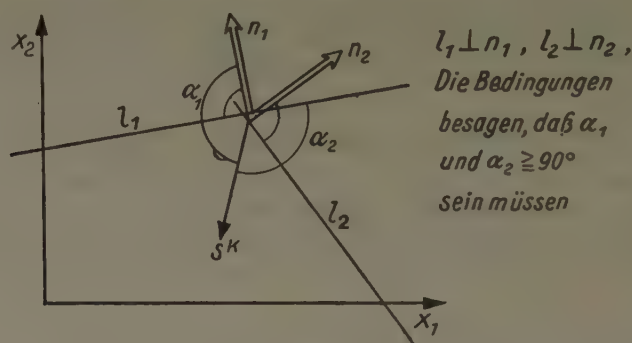


Bild 3

Die einzelnen Verfahren bestehen darin, daß aus der Menge der zulässigen und brauchbaren Richtungen s in x^k durch zusätzliche Vorschriften ein möglichst günstiges s^k bestimmt wird.

Hat man einmal s^k gefunden, so ist die Berechnung der endlichen Schrittlänge λ^k in allen Verfahren wiederum gleich.

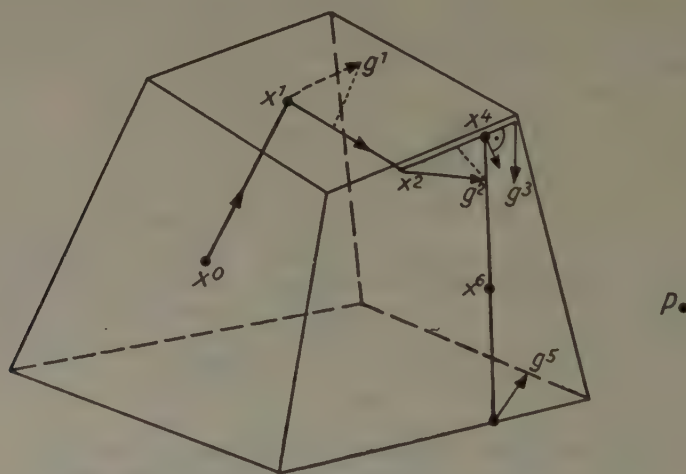


Bild 4

Man bestimmt λ' , bei dem der Strahl das Gebiet verläßt und λ'' , für den Q auf dem Strahl optimal wird und setzt dann

$$\lambda^k = \text{Min}(\lambda', \lambda'').$$

Dann gilt:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k s^k.$$

FRISCH bedient sich der sogenannten Multiplexmethode, wobei die Bewegungen in zwei verschiedenen Richtungen gehen. Entweder bewegt man sich senkrecht zu einem bestimmten Rand (um ins Innere zu gelangen) oder man bewegt sich innerhalb eines bestimmten Randes. Sehr verwandt mit FRISCH ist die Methode der projizierten Gradienten von ROSEN. Dabei projiziert er im Punkt x^k den Gradienten auf den Durchschnitt der Teilmannigfaltigkeit, die gebildet wird aus allen Hyperflächen, auf denen x^k liegt, und bewegt sich nun längs dieser projizierten Richtung (vgl. Bild 4). In jedem Punkt x^k muß man sich entscheiden, ob für die Ver-

besserung der Zielfunktion der Durchschnitt der Hyperebenen geändert werden muß oder nicht. In unserer Figur soll die Distanz eines inneren Punktes zu P minimiert werden. Die Lösung ist für x^4 erreicht.

ZOUTENDIJK ist es unlängst gelungen, den bereits bekannten Verfahren noch ein sehr wirkungsvolles beizufügen, das er als Verfahren der zulässigen Richtungen bezeichnet.

Man startet auch hier von einer zulässigen Ausgangslösung und versucht, eine Lösung zu erhalten mit einer verbesserten Zielfunktion. Für diesen Zweck bestimmt ZOUTENDIJK die sogenannte bestmögliche Richtung, was jeweils auf die Lösung eines kleinen linearen oder nichtlinearen Hilfsprogramms hinausläuft. Zur Lösung dieses Teilprogramms kann jeweils die Simplex-technik herangezogen werden. Zur Bestimmung der besten Richtung maximiert man für einen bestimmten Punkt x^k bei gegebenem Gradienten $g(x^k) = g$ den linearen Ausdruck

$$g' s$$

unter den Restriktionen

$$a'_j s \leq 0.$$

Im Falle einer quadratischen Zielfunktion gelang es ZOUTENDIJK unter Zuhilfenahme der Theorie der konjugierten Gradienten nach HESTENES und STIEFEL, das Verfahren endlich zu gestalten.

Alle drei erwähnten Gradientenverfahren arbeiten mit semidefiniten Formen und sind deshalb recht allgemein. Weiter ist es bei diesen Methoden möglich, auch nichtlineare Restriktionen beizuziehen.

Zusammenstellung der Methoden bezüglich Definitheit

HILDRETH: Definit	HOUTHAKKER: Definit
WOLFE: Semidefinit	THEILL: Definit
BARANKIN: Semidefinit	ROSEN: Semidefinit
BEALE: Semidefinit	FRISCH: Semidefinit
ZOUTENDIJK: Semidefinit.	

Anschrift: Prof. Dr. HANS P. KÜNZI, Zürich 2, Stockerstr. 44

Altes und Neues über numerische Quadratur^{*)}

Von E. STIEFEL

Mancher historische Rückblick auf die Methoden der numerischen Quadratur beginnt mit den Arbeiten von ARCHIMEDES über die Kreisberechnung. Auch wir werden so beginnen und zwar aus folgendem ganz besonderen Grund. Das Charakteristische der archimedischen Methode besteht ja darin, daß dem Kreis Polygone einbeschrieben werden, deren Seitenzahl während des Iterationsprozesses nicht irgendwie vergrößert, sondern bei jedem Schritt genau verdoppelt

wird. Unsere Betrachtungen werden darin gipfeln, daß ein analoger Verdoppelungsprozeß mit Einbau von Konvergenzverbesserungen auch für die Integration allgemeiner Funktionen aufgestellt werden kann und ein sicheres und numerisch sehr stabiles Verfahren liefert, das manchen anderen Verfahren vorzuziehen ist.

Mit irgendeinem regulären und dem Kreis einbeschriebenen Polygon beginnend (Bild 1), wollen wir dessen Fläche mit $T_{0,0}$ bezeichnen. Durch Verdoppelung der Seitenzahl entstehe die Fläche $T_{0,1}$ und so weiterhin die archimedische Folge

$$T_{0,0} \ T_{0,1} \dots \ T_{0,k} \dots \quad (1).$$

Zum Beispiel erhält man für die Fläche

$$\left. \begin{array}{l} \text{des 24-Ecks: } 3,132629 \\ \text{des 48-Ecks: } 3,139350 \end{array} \right\} \dots \quad (2),$$

also 3 richtige Dezimalen von π .

Die folgenden Jahrhunderte haben bekanntlich nichts wesentliches zur Berechnung von π beigetragen; erst im Jahre 1654 stoßen wir auf eine Jugendarbeit von HUYGENS, die eine höchst bemerkenswerte Konvergenzverbesserung der archimedischen Folge enthält. HUYGENS konstruiert die neue Folge

$$T_{1,k} = \frac{4 T_{0,k+1} - T_{0,k}}{3} \dots \quad (3),$$

er kombiniert also zwei aufeinanderfolgende archimedische Werte mit den Gewichten $\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{3}$

und zeigt durch kluge Abschätzungen, daß die Glieder dieser neuen Folge die Zahl π schneller approximieren. So erhält er zum Beispiel durch Kombination der beiden Werte von Formel (2)

$$\pi < 3.141590,$$

also bereits 6 richtige Dezimalen.

Leider ist die HUYGENSSCHE Arbeit wenig beachtet und durch die nun einsetzenden Methoden der Infinitesimalrechnung überstrahlt worden. Erst im Jahre 1936 hat K. KOMMERELL in seinem Buch „Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik“ weiteres hinzugefügt. Seine Betrachtungen laufen darauf hinaus, weitere Folgen

$$T_{2,k} = \frac{4^2 T_{1,k+1} - T_{1,k}}{4^2 - 1}, \quad T_{3,k} = \frac{4^3 T_{2,k+1} - T_{2,k}}{4^3 - 1} \dots \quad (4),$$

allgemein

$$T_{m,k} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1} \dots \quad (5)$$

zu konstruieren, von denen jede π schneller approximiert als die vorhergehende. Nimmt man die archimedische Folge als erste Kolonne in einem dreieckigen Schema und die weiteren Folgen

^{*)} Inhalt eines Hauptvortrages, den der Verfasser auf Einladung der Tagungsleitung auf der wissenschaftlichen Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik gehalten hat, die vom 4. bis 8. April 1961 in Würzburg stattfand.

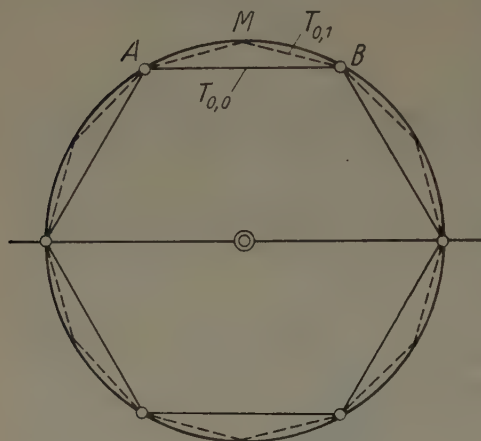


Bild 1

als weitere Kolonnen, so läßt sich das Schema aus der 1. Kolonne berechnen:

$$\left. \begin{array}{l} T_{0,0} \\ T_{0,1} \quad T_{1,0} = \frac{4 T_{0,1} - T_{0,0}}{3}, \\ T_{0,2} \quad T_{1,1} = \frac{4 T_{0,2} - T_{0,1}}{3}, \quad T_{2,0} = \frac{16 T_{1,1} - T_{1,0}}{15}, \\ T_{0,3} \quad T_{1,2} = \frac{4 T_{0,3} - T_{0,2}}{3}, \quad T_{2,1} = \frac{16 T_{1,2} - T_{1,1}}{15}, \quad T_{3,0} = \frac{64 T_{2,1} - T_{2,0}}{63} \end{array} \right\} \dots (6).$$

Leider hat KOMMERELL seine Rechnung nicht in dieser übersichtlichen Weise hergesetzt, und dies hat ihn vielleicht an einer weittragenden Entdeckung gehindert. Er gibt aber sehr genaue Restabschätzungen und erhält bis zum 48-Eck gehend die Zahl π mit 9 richtigen Dezimalen.

Merkwürdigerweise ist bis vor einigen Jahren niemand auf den naheliegenden Gedanken gekommen, die Integration einer beliebigen Funktion $f(x)$ in analoger Weise anzupacken. Die weitere Entwicklung der numerischen Integration ist vielmehr gekennzeichnet durch die Tätigkeit des Interpolierens, oder — etwas allgemeiner ausgedrückt — durch die Bemühungen, $f(x)$ durch Polynome zu approximieren.

Wenn dabei auch einige spektakuläre Ergebnisse erreicht wurden (SIMPSONsche Regel, GAUSSsche Quadratur), so müssen wir doch heute zur Ansicht neigen, daß diese Bevorzugung der Polynome das Denken in allzu enge Kanäle gelenkt hat und Schwierigkeiten hervorgebracht hat, die nicht in der einfachen Natur des RIEMANNschen Integralbegriffs liegen.

Letzteres sei etwas näher auseinandergesetzt in dem uns allein interessierenden Fall der gleichmäßigen Einteilung des Integrationsintervalls (a, b) in n gleiche Teile von der Länge $h = (b - a)/n$. Es handelt sich also um die Formeln von COTES; diese legen das Polynom n -ten Grades $P_n(x)$, das in den $(n + 1)$ Randpunkten der Teilintervalle dieselben Werte wie $f(x)$ annimmt (Stützwerte) und integrieren anschließend $P_n(x)$. Für $n = 2$ entsteht die SIMPSONsche Regel mit den positiven Integrationsgewichten 1, 4, 1. Auch für $n < 8$ sind alle Gewichte in den betreffenden COTES-Formeln positiv; für $n = 8$ treten aber zum ersten Mal negative Integrationsgewichte auf. Die Gewichte sind der Reihe nach in diesem Fall

$$989, 5888, -928, 10\,496, -4540, 10\,496, -928, 5888, 989 \dots (7)$$

und der genäherte Integralwert entsteht also, indem man die Stützwerte von $f(x)$ mit diesen Gewichten linear kombiniert. Eine solche Formel ist aber verdächtig. Das Integral ist nämlich *ex definitione* der Grenzwert einer Summe von Ordinaten; es ist nicht einzusehen, warum bei der numerischen Integration einige dieser Ordinaten negativ genommen werden müssen. Die Unbrauchbarkeit der höheren COTESschen Formeln wird endgültig erhärtet durch das folgende Resultat von KUSMIN:

Satz 1: Es gibt stetige Funktionen $f(x)$, für welche die COTESschen Werte mit wachsender Feinheit n der Einteilung nicht gegen das Integral von $f(x)$ streben.

Man wird daher in der Praxis nur die SIMPSONsche Regel oder vielleicht noch (die auch nach GAUSS benannte) Regel mit $n = 4$ (d. h. 5 Stützwerten) verwenden. Hat man etwa 8 Teilintervalle, so kann man entweder viermal SIMPSON oder zweimal GAUSS-COTES anwenden; es ist wohl nie genauer erforscht worden, was besser ist.

Diese Kritik veranlaßt uns, im folgenden eine Begründung der numerischen Quadratur zu versuchen, die in keiner Weise Polynome benutzt (Bild 2). Wir konstruieren nach dem Muster von ARCHIMEDES Polygone, die der Kurve $f(x)$ einbeschrieben sind und deren Seitenzahl bei jedem Schritt unseres Rechenverfahrens verdoppelt werden wird. Zunächst wird die Kurve $f(x)$ durch ihre Sehne AB ersetzt, was die Fläche des Trapezes

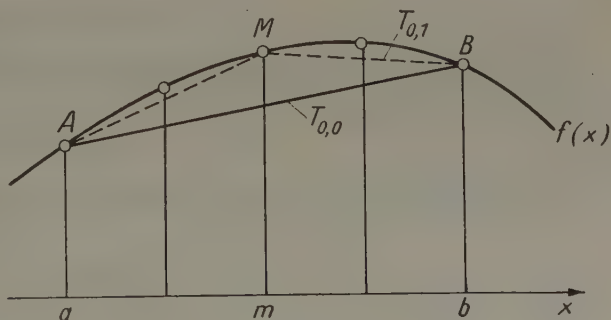


Bild 2

$$T_{0,0} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \dots (8)$$

als grobe Annäherung des Integrals ergibt. Nun wird halbiert, d. h. der Mittelpunkt m des Integrationsintervalls konstruiert, das Polygon AMB gezogen und die Summe der beiden entstandenen Trapeze

$$T_{0,1} = \frac{b-a}{4} [f(a) + 2f(m) + f(b)] \quad \dots \quad (8a)$$

als nächste Annäherung genommen. Weitere Halbierungen ergeben die Folge $T_{0,0} T_{0,1} T_{0,2} \dots T_{0,k} \dots$ der Trapezwerte, welche als Analogon der archimedischen Folge anzusehen ist.

Um den Fehler von $T_{0,k}$ abzuschätzen soll — ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit — das Normalintervall $(0, 2\pi)$ als Integrationsintervall genommen werden. Ferner sei $f(x)$ stetig und von beschränkter Schwankung, also in eine FOURIERREIHE entwickelbar. Endlich sei

$$J = \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

der genaue Integralwert und

$$T(n) = \frac{\pi}{n} [f(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(jh) + f(2\pi)] \quad \dots \quad (9)$$

seine Annäherung gemäß der Trapezregel, wenn das Normalintervall in $n = 2\pi/h$ gleiche Teile geteilt wird. Es gilt dann die Poissonsche Summenformel

$$T(n) - J = 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n\mu x dx \quad \dots \quad (10).$$

Sie drückt den Fehler der Trapezregel durch die höheren FOURIERKoeffizienten von $f(x)$ aus, berücksichtigt also die Oszillationen, welche $f(x)$ zwischen zwei Stützstellen macht. Unter den nötigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen kann man dies zweimal partiell integrieren und erhält

$$T(n) - J = \frac{2}{n^2} \zeta(2) [f'(2\pi) - f'(0)] - 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu n)^2} \int_0^{2\pi} f''(x) \cos n\mu x dx \quad \dots \quad (11),$$

dabei ist

$$\zeta(s) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^s} \quad \dots \quad (12)$$

die RIEMANNSCHE ζ -Funktion. Der Rest hierin läßt sich wieder zweimal partiell integrieren:

$$\begin{aligned} & - 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu n)^2} \int_0^{2\pi} f''(x) \cos n\mu x dx \\ & = - \frac{2}{n^4} \zeta(4) [f'''(2\pi) - f'''(0)] + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu n)^4} \int_0^{2\pi} f^{(4)}(x) \cos n\mu x dx \end{aligned}$$

und die triviale Abschätzung

$$\left| \int_0^{2\pi} f^{(4)}(x) \cos n\mu x dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f^{(4)}(x)| dx$$

zeigt, daß dieser Rest mit wachsendem n die Größenordnung $O(1/n^4)$ hat. Aus (11) folgt somit

$$T(n) - J = \frac{2}{n^2} \zeta(2) [f'(2\pi) - f'(0)] + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \dots \quad (13).$$

Bei unserem Verdoppelungsprozeß (8) (8a) ist nun $n = 2^k$ zu setzen, somit folgt endgültig

$$T_{0,k} - J = \frac{2}{4^k} \zeta(2) [f'(2\pi) - f'(0)] + O\left(\frac{1}{4^{2k}}\right) \quad \dots \quad (14).$$

Diese Formel erlaubt uns, die Konvergenz der Folge $T_{0,k}$ der Trapezwerte näher zu beschreiben. Wir tun dies zunächst unter der Voraussetzung $f'(0) \neq f'(2\pi)$, auf die wir später zurückkommen werden. Für den Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Fehlern hat man dann

$$\frac{T_{0,k+1} - J}{T_{0,k} - J} = \frac{\frac{1}{4} \zeta(2) [f'(2\pi) - f'(0)] + O\left(\frac{1}{4^k}\right)}{\zeta(2) [f'(2\pi) - f'(0)] + O\left(\frac{1}{4^k}\right)} \rightarrow \frac{1}{4}.$$

Dies ergibt

Satz 2. Für eine genügend oft differenzierbare Funktion $f(x)$ mit $f'(a) \neq f'(b)$ konvergiert die Folge der Trapezwerte $T_{0,k}$ linear gegen das Integral; der Konvergenzfaktor ist $\frac{1}{4}$.

Lineare Konvergenz bedeutet eben, daß die Abweichungen $(T_{0,k} - J)$ auf lange Sicht hin gegen Null konvergieren wie die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotient $1/4$. Diese Erkenntnis kann sofort zu einer Konvergenzverbesserung ausgenutzt werden. Man hat ja für große k ungefähr

$$T_{0,k+1} - J \sim \frac{1}{4} (T_{0,k} - J),$$

also

$$J \sim \frac{4 T_{0,k+1} - T_{0,k}}{3}.$$

Man wird also hoffen, daß die Folge

$$T_{1,k} = \frac{4 T_{0,k+1} - T_{0,k}}{3} \dots \dots \dots (15)$$

schneller gegen den Integralwert konvergiert. Dies ist aber genau die HUYGENSSche Konvergenzverbesserung (3) der archimedischen Folge. Durch weitere partielle Integrationen der POISSONschen Formel folgt in der Tat, daß nun die Folge $T_{1,k}$ linear konvergiert mit dem Konvergenzfaktor $\frac{1}{16}$ und die zugehörige Konvergenzverbesserung führt auf die nach (4) definierte Folge

$T_{2,k}$ usw. Man bildet also wieder das dreieckige Schema (6); jede seiner Kolonnen konvergiert linear, wobei aber die Konvergenz in jeder weiter rechts liegenden Kolonne schärfer wird.

W. ROMBERG [1] hat zum ersten Mal vorgeschlagen, in dieser Weise numerisch zu integrieren. Er stützt aber diesen Vorschlag nur auf die folgende Tatsache, die wir später noch beleuchten werden. Es zeigt sich, daß der Wert $T_{1,k}$ auch erhalten werden kann, indem man in den 2^k Doppelintervallen der zugehörigen Einteilung die SIMPSONsche Regel anwendet. Die SIMPSON-Werte $T_{1,k}$ können also durch lineare Kombination der Trapez-Werte $T_{0,k}$ mit den Gewichten 4, -1 gewonnen werden. Analog kann man beweisen, daß $T_{2,k}$ entsteht, indem man die oben genannte GAUSS-COTES-Regel anwendet. Auch diese Regel entsteht also durch Linearkombination der $T_{1,k}$ mit Gewichten 16, -1 . ROMBERG bildet nun in einleuchtender Extrapolation dieses Bildungsgesetzes die weiteren Kolonnen des Schemas, ohne über deren Konvergenz Aussagen zu machen.

Mit der Reihe $T_{2,k}$ hört aber jede Beziehung zur COTES-Integration auf. Man kann nämlich beweisen

Satz 3. Wird der Wert $T_{m,k}$ explizite als Linearkombination der Stützwerte von $f(x)$ dargestellt, so sind die Koeffizienten dieser Linearkombination (die Integrationsgewichte) positiv.

Der Wert $T_{3,0}$ zum Beispiel benutzt 9 Stützwerte und kann daher nicht mit dem Wert der COTES-Formel (7) übereinstimmen, in der negative Gewichte auftreten. Der ROMBERGsche Weg geht also genau an der Stelle vom COTESschen Weg ab, wo zum erstenmal negative Gewichte in der COTES-Formel auftreten. In [2] ist eine elementare Darstellung dieser Sachverhalte gegeben.

Bei unserer Herleitung wurde der Fall $f'(a) = f'(b)$ weggelassen. Er ist Spezialfall des viel wichtigeren Falles, wo $f(x)$ im Integrationsintervall periodisch ist. Zur Abklärung sei ein Resultat zitiert, das einer Arbeit von P. J. DAVIS [3] entnommen werden kann.

Satz 4. Die Funktion $f(x)$ sei periodisch im Integrationsintervall und außerdem regulär-analytisch in einem Streifen der komplexen Ebene, der die x -Achse als Mittellinie besitzt. Dann konvergiert die Folge $T_{0,k}$ der Trapezwerte superlinear gegen den Integralwert¹⁾.

Im periodischen Fall hat es daher keinen Zweck, die Kolonne der Trapezwerte zum Dreieck (6) zu ergänzen. Die Trapezregel ist alles in allem die beste Regel zur Integration periodischer Funktionen.

¹⁾ Damit ist gemeint: Die Folge $(T_{0,k} - J)$ besitzt eine Majorante mit der Eigenschaft, daß der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern gegen Null strebt.

Im nichtperiodischen Fall wird nun vor allem die Diagonalfolge $T_{0,0} T_{1,0} \dots T_{m,0} \dots$ des Integrationstableaus (6) interessieren, da in ihr eine besonders gute Konvergenz zu erwarten ist. Wir geben einige diesbezügliche Resultate, die bereits in [4] angekündigt worden sind, wobei wir mit stetigem Integranden beginnend zu analytischen und dann noch zu singulären Integranden fortschreiten.

Satz 5. Ist $f(x)$ stetig im abgeschlossenen Integrationsintervall, so konvergiert die Diagonalfolge gegen das Integral. Der Satz 1 von KUSMIN zeigt, daß diese Aussage durchaus nicht trivial ist. Der Beweis läßt sich auf die Tatsache gründen, daß der Übergang von der Trapezfolge $T_{0,k}$ zur Diagonalfolge $T_{m,0}$ ein regulärer Limitierungsprozeß im Sinne von TOEPLITZ ist. Beide Folgen konvergieren oder divergieren also gleichzeitig. Mühelos aber läßt sich Satz 5 aus einem Ergebnis von PÓLYA und STEKLOFF herleiten, welches besagt, daß jedes numerische Integrationsverfahren mit wachsender Feinheit der Einteilung konvergiert, falls die Integrationsgewichte durchwegs positiv sind und falls das Verfahren bei Verwendung von genügend vielen Stützstellen jedes Polynom richtig integriert (vgl. Satz 7).

Satz 6. $f(x)$ sei regulär analytisch in einem Gebiet G , welches das Integrationsintervall (a, b) enthält. Dann konvergiert die Diagonalfolge superlinear gegen den Integralwert.

Man hat also in diesem Fall wieder denselben Konvergenztyp wie in der Trapezfolge für periodische Funktion (Satz 4).

Diese und andere Konvergenzaussagen kann man aus folgender Restabschätzung herleiten²⁾:

$$T_{m,0} - J = 2(b-a) \frac{\zeta(2m+2)}{2^{m(m+1)}} \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi) \dots \dots (16).$$

Hierin ist ξ eine nicht näher angebbare Stelle im Integrationsintervall. Hieraus folgt sofort

Satz 7. Die Formel $T_{m,0}$ integriert jedes Polynom vom Grad $(2m+1)$ exakt.

$T_{1,0}$ zum Beispiel benutzt 3 Stützstellen und liefert daher nach diesem Satz das Integral der zugehörigen Stützparabel. Dies heißt aber, daß $T_{1,0}$ die SIMPSONSche Regel ist, was wir oben schon erwähnt haben. Analog folgt, daß $T_{2,0}$ die GAUSS-COTES-Regel ist. $T_{3,0}$ hingegen benutzt 9 Stützstellen und integriert Polynome 7-ten Grades richtig, während das Stützpolynom durch diese 9 Stützpunkte den Grad 8 hat und daher nicht exakt integriert wird.

Wir müssen uns durch die Formeln (14), (16) davon überzeugen lassen, daß die RIEMANNsche ζ -Funktion eine Schlüsselstellung bei der Untersuchung der Methode von ARCHIMEDES-ROMBERG einnimmt. H. RUTISHAUSER geht diesen Beziehungen gegenwärtig nach, und wir setzen folgende Kostprobe seiner Untersuchungen her. Es sei das singuläre Integral

$$J = \int_0^1 x^{-s} dx \dots \dots \dots (17)$$

zu berechnen, wobei für den Realteil σ der komplexen Zahl s gelten soll

$$0 < \sigma < 1.$$

Außerdem werde verabredet, daß bei Berechnung der Trapezwerte $T_{0,k}$ der Wert von x^{-s} für $x=0$ gleich Null gesetzt werde. Die Diagonalfolge $T_{m,0}$ konvergiert dann im allgemeinen linear gegen das Integral, aber superlinear dann und nur dann, wenn s eine Nullstelle der ζ -Funktion ist. Die RIEMANNsche Vermutung besagt also, daß superlineare Konvergenz nur für $\sigma = 1/2$ eintreten kann. Man kann dies schön durch numerische Experimente illustrieren.

Unser Integrationsverfahren durch sukzessive Halbierung kann auf mehrere Arten modifiziert werden. Erstens braucht man nicht zu halbieren, sondern man kann zum Beispiel bei jedem Schritt in 3 Teile teilen. Zweitens kann man nach dem Muster von ARCHIMEDES nicht nur einbeschriebene, sondern auch umbeschriebene Polygone heranziehen und so in gewissen Fällen den Integralwert in Grenzen einschließen.

Unsere Betrachtungen zeigen, daß die Exhaustionsmethode des ARCHIMEDES mit einigen Konvergenzverbesserungen den modernsten Ansprüchen des automatischen Rechnens gerecht wird, und sie vermitteln damit eine grundlegende Erkenntnis. In der numerischen Mathematik

²⁾ Eine äquivalente Formel wurde auch in Mainz anlässlich von numerischen Experimenten über das ROMBERGSche Verfahren hergeleitet und von Herrn Prof. F. L. BAUER an einem Symposium in Mons (Belgien) mitgeteilt.

sind nicht immer die kunstvollen mathematischen Konstruktionen (wie hier höhere Interpolationen) erfolgreich, sondern eher alte elementare und sehr direkte Methoden. Um letztere aber theoretisch erschöpfend durchleuchten zu können, müssen mitunter sehr kunstvolle mathematische Theorien eingesetzt werden.

Literatur

- [1] W. ROMBERG, Vereinfachte numerische Integration, Det Kong. Norske Videnskabers Selskab Forhandling, Band 28, Nr. 7, Trondheim 1955.
- [2] E. STIEFEL, Einführung in die numerische Mathematik, Stuttgart 1961, B. G. Teubner.
- [3] P. J. DAVIS, On the numerical integration of periodic analytic functions, Proceedings of a Symposium, Math. Research Center, Madison, Wisconsin 1959.
- [4] E. STIEFEL, H. RUTISHAUSER, Remarques concernant l'intégration numérique, Comptes rendus Ac. des sc., März 1961.

Anschrift: Prof. Dr. E. STIEFEL, Eidg. Technische Hochschule, Mathematisches Institut, Zürich

On the Vibration of Trapezoidal Plate Clamped along Each Edge with Damping Considered

By M. M. STANIŠIĆ*) and R. M. MCKINLEY**)

Das Problem der freien gedämpften Schwingungen einer am Rand eingespannten regelmäßigen Trapezplatte nach Bild 1 wird formuliert und mit Hilfe der verallgemeinerten Methode von Galerkin gelöst. Die Grundschwingungszahlen werden berechnet und in Tabellenform für verschiedene Werte der Formparameter b/a und H/a dargestellt. Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, daß für ein festes Verhältnis b/a die Grundfrequenz mit wachsendem Verhältnis H/a abnimmt. Für konstantes H/a nimmt die Frequenz mit wachsendem b/a ab. Wird die Platte rechteckig, so nimmt die Frequenz rasch ab.

The problem of free vibration of on trapezoidal plate fixed along each edge and having internal viscous damping is formulated and solved by means of generalized Galerkin's method. The fundamental natural frequencies are numerically calculated and presented in tabular form for various values of the dimension ratios b/a and H/a . The results of the analysis show that for a fixed ratio b/a the fundamental frequency decreases with an increase in the ratio H/a . Similarly, for a fixed ratio H/a the frequency decreases with increasing ratio b/a . A rapid decrease in frequency occurs as the plate becomes rectangular.

Формулируется проблема свободных затухающих колебаний пластинки в виде правильной трапеции с закреплённым краем (см. рисунок 1). Она решается при помощи обобщённого метода Галёркина. Вычисляются частоты собственных колебаний и представляются в форме таблиц для различных значений b/a и H/a . Результаты исследований показывают, что для данного значения b/a основная частота убывает при возрастании H/a . Для постоянного H/a при возрастании b/a частота убывает. Для прямоугольной пластинки частота убывает быстро.

1. Introduction

The problem of a vibrating trapezoidal plate has attracted the attention of many aeronautical and structural engineers. For this reason the work described in the present paper was undertaken. The exact solution of the problem is extremely complex and therefore it is necessary to resort to various approximate methods [1]***). The method adopted in this paper is that of GALERKIN {[2], [3], [4], [5]}. This method belongs to the same general class as those of RAYLEIGH and RITZ. Since the system under consideration is non-conservative this method is the most convenient one. Utilization of the GALERKIN method provides (a) a formulation of a physical problem sufficiently simple, so that numerical results can be obtained without introducing a great amount of work and (b) results which are sufficiently accurate for engineering purposes.

2. Formulation of the Problem

Assuming that the damping forces are proportional to the velocity, the motion of a thin plate under arbitrary loading $p(x, y, t)$ is governed by the following partial differential equation

$$D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} + k \dot{w} = p(x, y, t) \quad (1),$$

where $w = w(x, y, t)$ is the transverse deflection of the plate, k is the damping coefficient, h is the thickness of the plate, ρ is the mass density of the plate material, $D = E h^3/12 (1 - \nu^2)$ is the flexural rigidity of the plate, E is YOUNG's Modulus, and ν is POISSON's ratio.

The GALERKIN formulation of the problem becomes

$$\iint_{(S)} \{D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} + k \dot{w} - p(x, y, t)\} \delta w \, dx \, dy = 0 \quad (2).$$

This is a statement that the virtual work must vanish. For a uniform plate vibrating harmonically, we can write

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^r \Phi_m(x, y) \Psi_m(t) \quad (m = 1, \dots, r) \quad (3).$$

Then,

$$\delta w(x, y, t) = \sum_{m=1}^r \Phi_m(x, y) \delta \Psi_m(t) \quad (4).$$

*) Professor, School of Aeronautical and Engineering Sciences, Purdue University, West Lafayette, Indiana, U.S.A.

**) Graduate Student, Chemical Engineering, Purdue University, West Lafayette, Indiana, U.S.A.

***) Numbers in square brackets refer to bibliography at end of this paper.

Substituting equations (3) and (4) into equation (2) gives

$$\sum_{n=1}^r \left\{ \sum_{m=1}^r (L_{mn} \ddot{\Psi}_m(t) + K_{mn} \dot{\Psi}_m(t) + M_{mn} \Psi_m(t) - N_n(t)) \right\} \delta \Psi_n(t) = 0 \quad \dots (5),$$

with

$$L_{mn} = \varrho h \iint_{(S)} \Phi_m(x, y) \Phi_n(x, y) dx dy \quad \dots (6),$$

$$K_{mn} = k \iint_{(S)} \Phi_m(x, y) \Phi_n(x, y) dx dy \quad \dots (7),$$

$$M_{mn} = D \iint_{(S)} \nabla^4 [\Phi_m(x, y)] \Phi_n(x, y) dx dy \quad \dots (8),$$

$$N_n(t) = \iint_{(S)} p(x, y, t) \Phi_n(x, y) dx dy \quad \dots (9),$$

where S is region of integration.

Equation (5) implies

$$\sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r (L_{mn} \ddot{\Psi}_m(t) + K_{mn} \dot{\Psi}_m(t) + M_{mn} \Psi_m(t) - N_n(t)) = 0 \quad \dots (10).$$

For the case of free vibration the external load is zero, and equation (10) simplifies to

$$\sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r (L_{mn} \ddot{\Psi}_m(t) + K_{mn} \dot{\Psi}_m(t) + M_{mn} \Psi_m(t)) = 0 \quad \dots (11)$$

From the equations (6) and (7)

$$\frac{K_{mn}}{L_{mn}} = \frac{k}{\varrho h} \quad \dots (12),$$

while equations (7) and (8) show that

$$\frac{M_{mn}}{L_{mn}} = \frac{D}{\varrho h} \Lambda_{mn}^2 \quad \dots (13),$$

where

$$\Lambda_{mn}^2 = \frac{\iint_{(S)} \nabla^4 [\Phi_m(x, y)] \Phi_n(x, y) dx dy}{\iint_{(S)} \Phi_m(x, y) \Phi_n(x, y) dx dy} \quad \dots (14).$$

Equation (11) becomes

$$\sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r \left(\ddot{\Psi}_m(t) + \frac{k}{\varrho h} \dot{\Psi}_m(t) + \frac{D}{\varrho h} \Lambda_{mn}^2 \Psi_m(t) \right) = 0 \quad \dots (15).$$

A solution of equation (15) is given by

$$\Psi_m(t) = A_m e^{\alpha t} \cos(\Omega_{mn} t + \beta_n); \quad (m = 1, \dots, r) \quad \dots (16),$$

if α and Ω_{mn} satisfy

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha - \frac{k}{\varrho h} &= 0, \\ \Omega_{mn}^2 - \alpha^2 + \frac{k}{\varrho h} \alpha - \frac{D}{\varrho h} \Lambda_{mn}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (17).$$

Therefore,

$$\alpha = \frac{k}{2\varrho h},$$

and

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{D}{\varrho h} \Lambda_{mn}^2 - \left(\frac{k}{2\varrho h} \right)^2 \quad \dots (18).$$

Note that the frequency of the vibrating plate is $\frac{\Omega_{mn}}{2\pi}$. Consequently, the natural modes of vibration are known whenever Λ_{mn} is determined.

3. Solution of the Problem

In the present paper we consider an isosceles trapezoidal plate with all four edges clamped. The geometry of the plate is shown in the Figure below.

The boundary, Γ , is described by the four equations for four sections of the boundary.

$$x = \pm a, \quad y = \mp \frac{b}{2a+H} (x+a) \pm b \quad \dots \dots \dots (19).$$

We therefore associate with the differential equation (1), the following boundary conditions

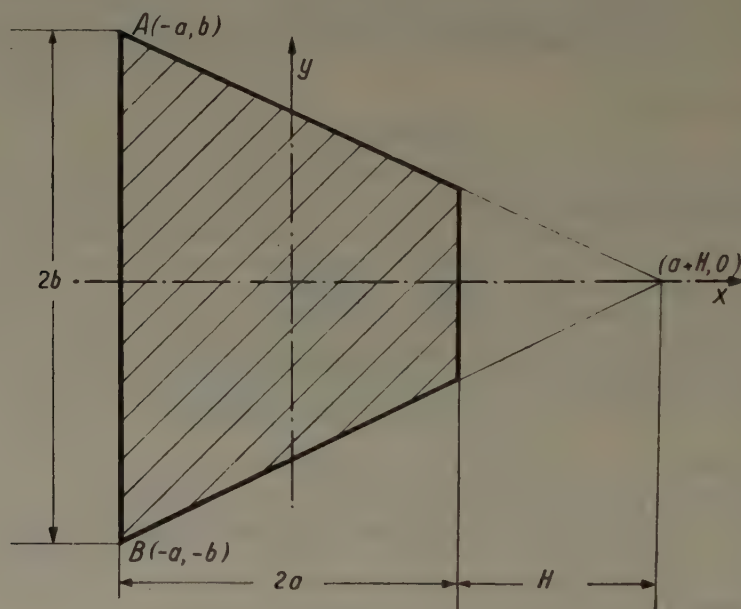
$$w(\pm a, y) = 0 \quad \dots \dots \dots (i),$$

$$w\left(x, \mp \frac{b}{2a+H} (x+a) \pm b\right) = 0 \quad \dots \dots \dots (ii),$$

$$w_x(\pm a, y) = 0 \quad \dots \dots \dots (iii),$$

$$w_{,n}\left(x, \mp \frac{b}{2a+H} (x+a) \pm b\right) = 0 \quad \dots \dots \dots (iv).$$

In condition (iv) $w_{,n} \equiv \frac{\partial w}{\partial n}$ denotes the normal derivative along the sides of the plate.



Geometry of Trapezoidal Plate

Note that permissible function $\Phi_m(x, y)$ in the solution given by equation (3) is approximated by a linear combination of coordinate functions $G_{ms}(x, y)$. Thus

$$\Phi_m(x, y) = \sum_{s=1}^S A_{ms} G_{ms}(x, y) \quad (m = 1, \dots, r) \quad \dots \dots \dots (20),$$

where A_{ms} are constants and each $G_{ms}(x, y)$ satisfies the boundary conditions (i)–(iv) identically. Such a sequence of functions is given by

$$G_{ms} = (x^2 - a^2)^2 \left\{ \left(y + \frac{b}{2a+H} (x+a) - b \right) \left(y - \frac{b}{2a+H} (x+a) + b \right) \right\}^2 x^{s-1} y^{s-1} \quad (s = 1, \dots, S) \quad (21).$$

Thus $\Phi_m(x, y)$ becomes

$$\Phi_m(x, y) = \sum_{s=1}^S (x^2 - a^2)^2 \left\{ \left(y + \frac{b}{2a+H} (x+a) - b \right) \left(y - \frac{b}{2a+H} (x+a) + b \right) \right\}^2 A_{ms} x^{s-1} y^{s-1} \quad (22).$$

The functions $\Phi_m(x, y)$ obviously satisfy boundary conditions (i)–(iii). That condition (iv) is also satisfied follows from the definition of the directional derivative, namely

$$w_{,n} \equiv \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n},$$

and the fact that $\frac{\partial \Phi_m}{\partial x}$ and $\frac{\partial \Phi_m}{\partial y}$ vanish on the boundary, that is

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=1}^r \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \Psi_m(t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{m=1}^r \frac{\partial \Phi_m}{\partial y} \Psi_m(t) = 0,$$

on Γ .

An approximation to the first permissible function $\Phi_1(x, y)$ is obtained from equation (22) with $m = s = 1$ and $A_{11} = 1$. Thus

$$\Phi_1(x, y) = (x^2 - a^2)^3 \left\{ \left(y + \frac{b}{2a+H} (x+a) - b \right) \left(y - \frac{b}{2a+H} (x+a) + b \right) \right\}^2 \quad (23).$$

Taking the limit,

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \Phi_1(x, y) = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \quad (24),$$

gives the GALIN [3] result for rectangular plates. Further

$$\lim_{H \rightarrow 0} \Phi_1(x, y) = (x^2 - a^2)^3 \left\{ \left(y + \frac{b}{2a} (x+a) - b \right) \left(y - \frac{b}{2a} (x+a) + b \right) \right\}^2 \quad (25),$$

corresponds to the isosceles triangular plate.

Substitution of equation (23) into equation (6) for L_{11} leads to

$$\frac{L_{11}}{q h} = \frac{2^{16} a^{18} \mu^9}{9^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2} F_1(\eta) \quad (26),$$

where

$$F_1(\eta) = \sum_{\epsilon=0}^4 a_{\epsilon} \eta^{2\epsilon} (1-\eta)^{9-2\epsilon} \quad (27),$$

and

$$\mu = \frac{b}{a},$$

$$\eta = \frac{a}{(2a+H)} \quad (28),$$

and a_{ϵ} are constant coefficients tabulated in Table I. Similarly, combining equations (8) and (23) we find

$$\frac{M_{11}}{D} = \frac{2^{15} a^{14} \mu^9}{3^2 \cdot 7 \cdot 5^2} F_2(\mu \eta) \quad (29),$$

Table I. Coefficients appearing in equations (27) and (30)

$a_0 = 1$
$a_1 = \frac{36}{11}$
$a_2 = \frac{378}{13 \times 11}$
$a_3 = \frac{84}{13 \times 11}$
$a_4 = \frac{63}{17 \times 13 \times 11}$
$b_0(\mu \eta) = 1$
$b_1(\mu \eta) = \frac{120}{7} + \frac{4}{7} \left(\frac{1}{\mu \eta} \right)^2$
$b_2(\mu \eta) = 43 + \frac{10}{3} \left(\frac{1}{\mu \eta} \right)^2 + \left(\frac{1}{\mu \eta} \right)^4$
$b_3(\mu \eta) = \frac{250}{11} + \frac{80}{11 \times 3} \left(\frac{1}{\mu \eta} \right)^2 + \frac{10}{11} \left(\frac{1}{\mu \eta} \right)^4$
$b_4(\mu \eta) = \frac{290}{13 \times 11} + \frac{110}{13 \times 11 \times 3} \left(\frac{1}{\mu \eta} \right)^2 + \frac{15}{13 \times 11} \left(\frac{1}{\mu \eta} \right)^4$

where

$$F_2(\mu \eta) = \sum_{s=0}^4 b_s(\mu \eta) \eta^{2s} (1 - \eta)^{9-2s} \dots \dots \dots (30),$$

and $b_s(\mu \eta)$ are variable coefficients tabulated in Table I.

Values of the functions $F_1(\eta)$ and $F_2(\mu \eta)$ as computed from equations (27) and (30) are tabulated in Tables II and III respectively.

Table II. $F_1(\eta)$ as defined by Eq. (27)

H/a	η	$F_1(\eta)$
0	0.500000	0.014706
0.10	0.476190	0.017378
0.30	0.434783	0.023473
0.50	0.400000	0.030528
1.00	0.333333	0.051834
1.50	0.285714	0.078147
3.00	0.200000	0.163077
5.00	0.142857	0.273032
∞	0	1.000000

Table III. $F_2(\mu \eta)$ as defined by Eq. (30)

H/a	$\mu = b/a$				
	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
0	1.380526	0.282152	0.203065	0.184563	0.174261
0.10	1.545131	0.300093	0.211959	0.191466	0.180157
0.30	1.890798	0.347476	0.229600	0.204971	0.191611
0.50	2.252016	0.375659	0.247029	0.218165	0.202674
1.00	3.181803	0.470644	0.289527	0.249831	0.228998
1.50	4.111954	0.570746	0.336672	0.285881	0.259484
3.00	6.506820	0.813308	0.443323	0.364352	0.323986
5.00	8.886860	1.079044	0.572133	0.463892	0.408577
∞	18.285714	2.571428	1.451499	1.205357	1.075838

The smallest natural vibration frequency is determined from equation (13) to be

$$A_{11}^3 = \frac{M_{11}}{D} \frac{e h}{L_{11}} = \frac{63}{2 a^4} \frac{F_2(\mu \eta)}{F_1(\eta)} \dots \dots \dots (31).$$

For the rectangular plate, $\eta = 0$ and equation (31) reduces to

$$A_{11}^3 = \frac{63}{2 a^4} \left(1 + \frac{4}{7} \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^4} \right) \dots \dots \dots (32),$$

or

$$A_{11} = 3 \left[\frac{7}{2} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{4}{7} \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^4} \right) \right]^{1/2} \dots \dots \dots (33),$$

which is the result given by GALIN [3], equation (9). Note that a typographical error occurs in the numerical coefficient of GALIN's expression for M_{11} . It should be identical with the coefficient in equation (29) of this paper.

For the isosceles triangular plate $\eta = 1/2$ in equations (31).

The dimensionless frequency

$$(2 a)^3 A_{11} = \left[504 \frac{F_2(\mu \eta)}{F_1(\eta)} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (34)$$

is tabulated in Table IV. Here we note the rapid decrease in frequency as the plate becomes rectangular.

Table IV. Smallest Natural Frequencies for the Clamped Trapezoidal Plate

$$(2a)^2 A_{11} = \left[504 \frac{F_2(\mu \eta)}{F_1(\eta)} \right]^{1/2}$$

H/a	$\mu = b/a$				
	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
0	217.52	98.34	83.42	79.53	77.28
0.1	211.69	93.29	78.40	74.52	72.28
0.3	201.49	86.38	70.21	66.34	64.14
0.5	192.82	78.75	63.86	60.02	57.84
1.0	175.89	67.65	53.06	49.29	47.19
1.5	162.85	60.67	46.60	42.94	40.91
3.0	141.80	50.14	37.02	33.56	31.64
5.0	128.08	44.63	32.50	29.26	27.46
∞	96.00	36.00	27.05	24.65	23.28

4. Conclusion

The problem of free vibration of an isosceles trapezoidal plate fixed along each edge and having internal viscous damping proportional to the velocity of motion is formulated and solved by means of GALERKIN's technique. The solution for the free vibration of rectangular and triangular plates has been considered as a special case. The influence of the damping factor on the natural frequency is given by eq. (18). A rapid decrease in frequency is obtained as the plate becomes rectangular.

Literature

- [1] M. M. STANIŠIĆ, Lectures in Theory of Plate and Shells, during Fall Semester, 1958, Purdue University.
- [2] M. M. STANIŠIĆ, Free Vibration of a Rectangular Plate with Damping Considered, Quarterly of Appl. Math **XII** (1955), No. 4.
- [3] M. P. GALIN, On the Transversal Vibration of the Plate, Prikladnaya Mat. i Meh. **XI** (1947).
- [4] M. M. STANIŠIĆ, An Approximate Method Applied to the Solution of the Problem of Vibrating Rectangular Plates, Aeronautical Sciences (Readers Forum), **24** (1957), No. 2.
- [5] A. P. FILIN, Concerning a Variational Method in Structural Mechanics, Inst. Mehaniki A. N. SSSR, Inzenerni sbornik **XIX** (1954).

Manuskripteingang: 12. 11. 1960

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. Dr. phil. M. M. STANIŠIĆ, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA

Ein Beitrag zur Theorie der Kerbspannungen

Von IVO BABUŠKA und JAROSLAV KAUSKÝ

In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff eines Funktional-Differentials der Lösung des ersten Problems der ebenen Elastizitätstheorie im Hinblick auf Veränderungen des Definitionsgebietes eingeführt. Ohne allgemeine Sätze über die Existenz und die Eigenschaften dieser Differentiale zu beweisen, werden einige Ergebnisse angedeutet und auf die Lösung des Problems der Kerbspannungen angewendet.

Das angeführte Rechenverfahren ist einfach und von vollkommen ausreichender Genauigkeit, und ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den experimentellen und denen der Neuber'schen Theorie läßt größere Anwendungsmöglichkeiten als diese erkennen.

In the present paper the concept of a functional differential, with respect to a variable region of definition, of the solution of the first problem of the theory of plane elasticity is introduced. Without proving general theorems concerning existence and properties of these differentials, some results are indicated and used to solve the problem of notch stress.

The given method of computation is simple and sufficiently accurate for all practical purposes. A comparison of our numerical results with the experimental values on the one hand and the results of Neuber's theory on the other hand shows that our method has a larger range of validity than the latter.

В настоящей работе вводится понятие функционального дифференциала для решения первой проблемы плоской теории упругости в зависимости от изменения области определения. Без доказательств теоремы существования и теорем о свойствах этого дифференциала указываются некоторые результаты, которые применяются к решению проблемы врубных напряжений. По сравнению с теорией Нейбера приведённый метод имеет большую область применения; он очень прост и достаточно точен, как это следует из приведённых вычислений, численных и экспериментальных результатов.

1. Einleitung

Die Probleme der Spannungskonzentration stehen schon mehrere Jahre im Mittelpunkt des Interesses. Eine Reihe von Autoren widmete sich diesen Fragen sowohl in theoretischer als auch in experimenteller Hinsicht. Aus den theoretischen Arbeiten führen wir z. B. diejenigen von NEUBER [1] an, welche beinahe schon als klassisch angesehen werden können und deren Ergebnisse wegen ihrer Einfachheit und Genauigkeit viel benutzt werden. Von den experimentellen Arbeiten führen wir diejenigen von DURELLI, LAKE, PHILLIPS [2] an, welche das Problem der Einwirkung einer endlichen Anzahl von Kerben lösen; dieses Problem ist beispielsweise in den Arbeiten von NEUBER nicht gelöst worden. Ein ausführliches Literaturverzeichnis und Ergebnisse über Probleme der Konzentrationsspannungen siehe z. B. [3].

In der vorliegenden Arbeit wollen wir konkrete Anwendungen der Theorie des Einflusses von kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes auf die Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen andeuten; die zugehörigen theoretischen Untersuchungen sind zur Veröffentlichung vorbereitet. Einige Ergebnisse siehe auch [4].

Die Ergebnisse, welche in der vorliegenden Arbeit erzielt werden, sind einfache und für die Praxis vollkommen ausreichende Angaben. Wir führen auch einen Vergleich mit experimentellen Angaben an. Die rein theoretischen Probleme werden in einer anderen Arbeit ausführlich studiert. Hier werden einige technisch wichtigere Ergebnisse und intuitiv die Schlußformeln angedeutet, ohne genaue Untersuchung der notwendigen Voraussetzungen.

2. Konzentration der Spannungen in der Nähe der Kerben

2.1. In diesem Absatz wollen wir den Grundgedanken der Lösung für einen homogenen und isotropen Körper andeuten. Auf die gleiche Weise kann man auch im allgemeinen Fall vorgehen. Wir beschränken uns darüber hinaus der Einfachheit halber auf den ebenen Fall.

Es sei $\mu(x)$ eine Funktion, welche beispielsweise die LIPSCHITZBEDINGUNG erfüllt und auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ definiert ist. Wir bezeichnen solche Funktionen grundsätzlich mit griechischen Buchstaben zum Unterschied von Funktionen, welche mit lateinischen Buchstaben bezeichnet werden.

Weiter bedeuten im ganzen Absatz

$$\Omega_{\lambda\mu} := E[x, y; y < \lambda\mu(x)], \quad \lambda \geq 0,$$

und der Rand dieses Gebietes $\Omega_{\lambda\mu}$ werde mit dem Symbol

$$\dot{\Omega}_{\lambda\mu} = E[x, y; y = \lambda\mu(x)]$$

bezeichnet. Wir bezeichnen weiter eine Funktion, welche identisch gleich Null ist, mit $0(x)$. Dann ist offenbar Ω_0 die untere Halbebene.

Es sei $f(x, y)$ eine Funktion, welche auf ganz E_2^1 definiert ist. Dann existiert unter gewissen Voraussetzungen für die Funktion $f(x, y)$, z. B. wenn

$$\iint_{E_2} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy < \infty$$

ist, gerade eine einzige biharmonische Funktion $U_\mu(f; x, y)$ (in einer gewissen Klasse von Funktionen, z. B. derjenigen, für die

$$\iint_{E_2} \left[\left(\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy < \infty$$

gilt), welche auf $\bar{\Omega}_\mu$ die Randbedingungen

$$U_\mu = f, \quad \frac{\partial U_\mu}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

erfüllt.

(Unter den gegebenen Bedingungen gilt, daß f und U_μ auf $\bar{\Omega}_\mu$ stetig sind und man die Gleichung $U_\mu = f$ auf $\bar{\Omega}_\mu$ im gewöhnlichen Sinne auffassen kann. Die Gleichung $\frac{\partial U_\mu}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ muß jedoch schon im verallgemeinerten Sinne aufgefaßt werden, siehe [5].)

Es sei nun $\lambda > 0$ und es gelte $\lambda \rightarrow 0$. Dann ist, siehe [4],

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} U_{\lambda\mu}(f; x, y) = U_0(f; x, y) \quad \dots \quad (2,1).$$

Unter den oben angeführten Bedingungen bedeutet der Ausdruck (2,1), daß

$$U_{\lambda\mu}(f; x, y) \rightarrow U_0(f; x, y)$$

für alle festen x, y gilt, genauer gesagt:

$$\iint_{\Omega_{\lambda\mu} \cap \Omega_0} \left[\left(\frac{\partial^2 (U_{\lambda\mu} - U_0)}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 (U_{\lambda\mu} - U_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 (U_{\lambda\mu} - U_0)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \rightarrow 0.$$

Das biharmonische Problem auf $\Omega_{\lambda\mu}$ ist äquivalent dem Problem des Spannungszustandes eines Körpers, der von der Kurve $\lambda\mu(x)$ begrenzt wird. In diesem Fall ist $U_{\lambda\mu}(f; x, y)$ die ARRY-Funktion für den Spannungszustand auf $\Omega_{\lambda\mu}$, wenn der Vektor der Außenspannung auf $\Omega_{\lambda\mu}$ durch die Gleichungen²⁾

$$X_n(x) = - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \lambda\mu(x)) \frac{\lambda\mu'(x)}{\sqrt{1 + \lambda\mu'(x)}} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \lambda\mu(x)) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\mu'(x)}},$$

$$Y_n(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \lambda\mu(x)) \frac{\lambda\mu'(x)}{\sqrt{1 + \lambda\mu'(x)}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \lambda\mu(x)) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\mu'(x)}}$$

gegeben ist.

Der Ausdruck (2,1) drückt die stetige Abhängigkeit von der Form des Körpers aus. Das heißt: konvergiert die Form des Körpers zur Halbebene, so konvergiert der Spannungszustand zum Spannungszustand der Halbebene. Unter der Voraussetzung, daß (2,1) gilt, ist es von Bedeutung, die Frage zu stellen, wann (in gewissem Sinne)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{U_{\lambda\mu}(f; x, y) - U_0(f; x, y)}{\lambda} \quad \dots \quad (2,2)$$

existiert. Wenn (2,1) die Stetigkeit ausdrückt, so drückt (2,2) die Ableitung aus. Wenn (2,2) existiert, so existiert das GATEAU-Differential. Es ist auch von Bedeutung, das FRECHET-Differential zu erwähnen. Die Frage, wann diese Differentiale existieren, wird in einer weiteren Arbeit erörtert werden. Wir setzen voraus, daß für jedes feste (x, y) der Grenzwert des Ausdruckes (2,2) existiert, d. h. die Funktion

$$V_1(\mu, f; x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{U_{\lambda\mu}(f; x, y) - U_0(f; x, y)}{\lambda} \quad \dots \quad (2,3).$$

¹⁾ Mit dem Symbol E_2 bezeichnen wir den zweidimensionalen Euklidischen Raum. Mit lateinischen Buchstaben bezeichnen wir zum Unterschied von den griechischen Buchstaben Funktionen, welche auf E_2 definiert sind.

²⁾ Wir bezeichnen $\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{x, y = \lambda\mu(x)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \lambda\mu(x))$ und ähnlich in weiteren Fällen.

Dann folgt aus den Eigenschaften der biharmonischen Funktionen, daß $V_1(\mu, f; x, y)$ eine auf Ω_0 biharmonische Funktion ist. In ähnlicher Weise ist es möglich, die Funktion

$$V_n(\mu, f; x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^n} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} U_{\lambda(n-p)\mu}(f; x, y) \quad \dots \quad (2,4)$$

zu untersuchen. Falls eine Funktion $V_n(\mu, f; x, y)$ existiert, nennen wir sie das n -te GATEAU-Differential. Wenn alle Differentiale (GATEAU) bis zur n -ten Ordnung existieren, dann ist offenbar

$$U_{\lambda\mu}(f; x, y) = U_0 + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} V_p(\mu, f; x, y) \lambda^p + o(\lambda^n) \quad \dots \quad (2,5).$$

Ähnlich wie bei der TAYLORSchen Reihe können wir

$$U_\mu(f; x, y) = U_0 + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} V_p(\mu, f; x, y) \quad \dots \quad (2,6)$$

schreiben. Aus den Eigenschaften der biharmonischen Funktionen folgt, daß die Funktionen $V_n(\mu, f; x, y)$, wenn sie existieren, biharmonische Funktionen auf Ω_0 sind. Gelingt es uns, die Randbedingungen der Funktionen V_n zu bestimmen, so sind dann diese Funktionen die Lösung des biharmonischen Problems für die Halbebene mit diesen Randbedingungen.

Wir leiten nun anschaulich die Randbedingungen der Funktionen V_n her. Wir setzen voraus, daß die Funktionen f, U_0, V_n eine genügende Anzahl stetiger Ableitungen haben. Dann ist auf $\dot{\Omega}_{\lambda\mu}$ nach (2,5)

$$U_{\lambda\mu}(f; x, \lambda\mu) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \lambda^p \mu^p \frac{\partial^p U_0}{\partial y^p}(f; x, 0) + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^{n-p} \frac{1}{q!} \lambda^{p+q} \mu^q \frac{\partial^{p+q} V_p}{\partial y^q}(\mu, f; x, 0) + o(\lambda^n)$$

und

$$U_{\lambda\mu}(f; x, \lambda\mu) = f(x, \lambda\mu) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \lambda^p \mu^p \frac{\partial^p f}{\partial y^p}(x, 0) + o(\lambda^n).$$

Durch Vergleich der Koeffizienten des Gliedes λ^p erhalten wir

$$\frac{1}{p!} \mu^p \frac{\partial^p U_0}{\partial y^p}(f; x, 0) + \sum_{s=0}^{p-1} \frac{1}{s! (p-s)!} \mu^s \frac{\partial^s V_{p-s}}{\partial y^s}(\mu, f; x, 0) = \frac{1}{p!} \mu^p \frac{\partial^p f}{\partial y^p}(x, 0).$$

Also ist

$$V_p(\mu, f; x, 0) = \mu^p \left(\frac{\partial^p f}{\partial y^p}(x, 0) - \frac{\partial^p U_0}{\partial y^p}(f; x, 0) \right) - \sum_{s=1}^{p-1} \binom{p}{s} \mu^s \frac{\partial^s V_{p-s}}{\partial y^s}(\mu, f; x, 0).$$

Weiter ist in ähnlicher Weise auf $\dot{\Omega}_{\lambda\mu}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\lambda\mu}}{\partial y}(f; x, \lambda\mu) &= \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \lambda^p \mu^p \frac{\partial^{p+1} U_0}{\partial y^{p+1}}(f; x, 0) + \sum_{p=1}^n \sum_{q=0}^{n-p} \frac{1}{p! q!} \lambda^{p+q} \mu^q \frac{\partial^{p+q+1} V_p}{\partial y^{q+1}}(\mu, f; x, 0) + o(\lambda^n) \\ &= \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \lambda^p \mu^p \frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}(x, 0) + o(\lambda^n). \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{\partial V_p}{\partial y}(\mu, f; x, 0) = \mu^p \left(\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}(x, 0) - \frac{\partial^{p+1} U_0}{\partial y^{p+1}}(f; x, 0) \right) - \sum_{s=1}^{p-1} \binom{p}{s} \mu^s \frac{\partial^{s+1} V_{p-s}}{\partial y^{s+1}}(\mu, f; x, 0).$$

Es ist weiter

$$U_0(f; x, 0) = f(x, 0), \quad \frac{\partial U_0}{\partial y}(f; x, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0).$$

Dann erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} V_1(\mu, f; x, 0) &= 0, & \frac{\partial V_1}{\partial y}(\mu, f; x, 0) &= \mu \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) - \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}(f; x, 0) \right), \\ V_2(\mu, f; x, 0) &= -\mu \frac{\partial V_1}{\partial y}(\mu, f; x, 0) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2,7),$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y}(\mu, f; x, 0) = \mu^2 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, 0) - \frac{\partial^3 U_0}{\partial y^3}(f; x, 0) \right) - 2\mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}(\mu, f; x, 0) \quad \dots \quad (2,8).$$

2.2. Auf Grund der Ergebnisse aus 2.1 leiten wir nun die Formeln für die gezogene Halbebene und eine Kreiskerbe ab, s. Bild 1. In diesem Fall ist

$$\mu(x) = \varrho - t - \sqrt{\varrho^2 - x^2} \quad \text{für } |x| < \sqrt{2\varrho t - t^2},$$

$$\mu(x) = 0 \quad \text{für } |x| \geq \sqrt{2\varrho t - t^2}.$$

Der Punkt der maximalen Konzentration ist offenbar im Punkt A (s. Bild 1).

Wir setzen nun $f(x, y) = -\frac{1}{2}y^2$. Dann ist der Spannungszustand der Halbebene mit einem kreisförmigen Ausschnitt durch die Funktion

$$\frac{1}{2}y^2 + U_{\lambda\mu}(f; x, y)$$

beschrieben. Der Konzentrationskoeffizient $K_{\lambda,t}$ ist daher

$$K_{\lambda,t} = 1 + \frac{\partial^2 U_{\lambda\mu}}{\partial y^2}(f; 0, \lambda\mu(0)).$$

Nach den Ergebnissen in 2.1 setzen wir (im Punkt A)

$$\frac{\partial^2 U_{\lambda\mu}}{\partial y^2}(f; 0, \lambda\mu(0)) = \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}(f; 0, \lambda\mu(0)) + \lambda \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}(\mu, f; 0, \lambda\mu(0)) + o(\lambda).$$

Daher ist

$$K_{\lambda,t} = 1 + \lambda \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}(\mu, f; 0, 0) + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}(f; 0, 0) + \lambda \mu(0) \frac{\partial^3 U_0}{\partial y^3}(f; 0, 0) + o(\lambda).$$

Es ist jedoch $U_0(f, x, y) = 0$ und die Funktion V_1 erfüllt folgende Randbedingungen

$$V_1(\mu, f; x, 0) = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y}(\mu, f; x, 0) = -\mu(x).$$

Die Funktion V_1 ist daher auf Ω_0 die AIRY-Funktion für den Spannungszustand

$$Y_y(x, 0) = 0, \quad X_y(x, 0) = \mu'(x) = \frac{x}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}}$$

$$\text{für } |x| < \sqrt{2\varrho t - t^2}.$$

Darum ist

$$X_x(0, 0) = \frac{2}{\pi} \int_{-\sqrt{2\varrho t - t^2}}^{\sqrt{2\varrho t - t^2}} \frac{1}{x} \frac{x}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \arcsin \sqrt{2 \frac{t}{\varrho} - \frac{t^2}{\varrho^2}},$$

und es gilt

$$K_{1,t} = K_t = 1 + \frac{4}{\pi} \arcsin \sqrt{2 \frac{t}{\varrho} - \frac{t^2}{\varrho^2}} \quad (2.9).$$

Auf Bild 2 ist der Verlauf des Koeffizienten K_t eingezeichnet. Gleichzeitig sind dort der Verlauf dieses Koeffizienten nach der Theorie von NEUBER und die genaue Lösung (siehe [6]) angeführt. Es ist außerdem noch der Konzentrationskoeffizient für eine elliptische Kerbe mit der Hauptachse in der Geraden der Halbebene angedeutet. Wir erhalten, wie zu sehen ist, mit NEUBER absolut identische Ergebnisse.

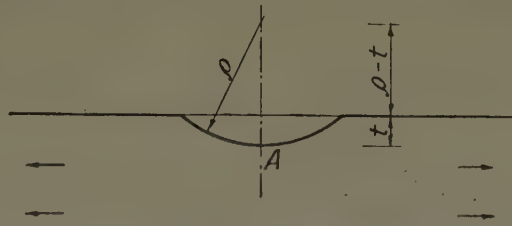


Bild 1. Kreisförmige Kerbe in einer Halbebene

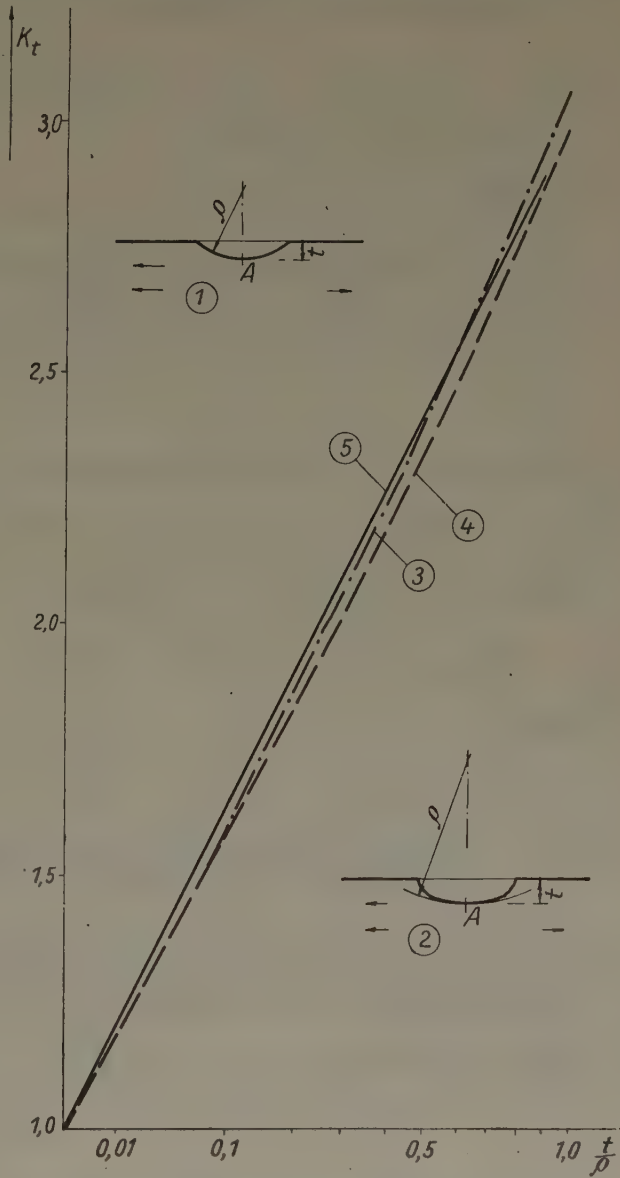


Bild 2. Konzentrationskoeffizient K_t mit Rücksicht auf die Kerbe t . ϱ — Krümmungshalbmesser im Punkt A. ① Kreisförmige Kerbe, ② elliptische Kerbe, ③ die genaue Lösung für die kreisförmige Kerbe (nach [6]), ④ die Lösung für die kreisförmige Kerbe mit Hilfe des ersten Differentials (nach (2,9)), ⑤ die Lösung von NEUBER (nach [1]), welche mit der Lösung für eine elliptische Kerbe mit Hilfe des ersten Differentials identisch ist.

2.3. Auf Grund der Ergebnisse aus 2.1 leiten wir mit Hilfe der Differentiale zweiter Ordnung die Formeln für eine parabolische Kerbe ab. Die parabolische Kerbe ist auf Bild 3 abgebildet. — Ähnlich wie in dem vorhergehenden Fall ist

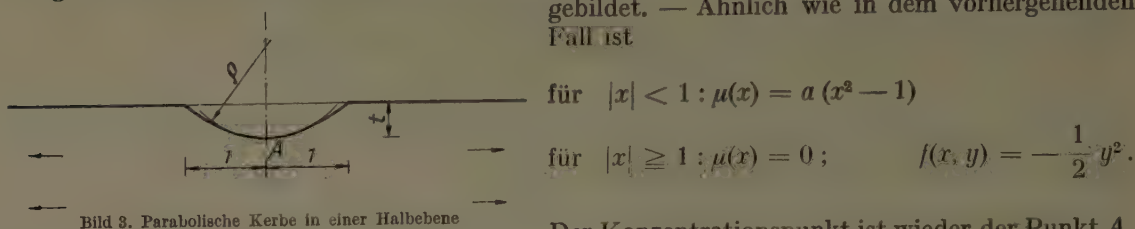


Bild 3. Parabolische Kerbe in einer Halbebene

Der Konzentrationspunkt ist wieder der Punkt A. Der Spannungszustand der Halbebene ist nun durch die AIRY-Funktion

$$\frac{1}{2} y^2 + U_{\lambda\mu}(f; x, y)$$

beschrieben, und der Koeffizient $K_{\lambda,t}$ ist

$$\begin{aligned} K_{\lambda,t} &= 1 + \frac{\partial^2 U_{\lambda\mu}}{\partial y^2}(f; 0, \lambda\mu(0)) \\ &= 1 + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}(f; 0, \lambda\mu(0)) + \lambda \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}(\mu, f; 0, \lambda\mu(0)) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}(\mu, f; 0, \lambda(0)) + o(\lambda^2) \\ &= 1 + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}(f; 0, 0) + \lambda\mu(0) \frac{\partial^3 U_0}{\partial y^3}(f; 0, 0) + \frac{1}{2} \lambda^2 \mu^2(0) \frac{\partial^4 U_0}{\partial y^4}(f; 0, 0) \\ &\quad + \lambda \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}(\mu, f; 0, 0) + \lambda^2 \mu(0) \frac{\partial^3 V_1}{\partial y^3}(\mu, f; 0, 0) + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}(\mu, f; 0, 0) + o(\lambda^2). \end{aligned}$$

Die Funktion V_1 ist durch die Bedingungen

$$V_1(\mu, f; x, 0) = 0; \quad \frac{\partial V_1}{\partial y}(\mu, f; x, 0) = -a(x^2 - 1) \quad \text{für} \quad |x| < 1$$

bestimmt. Es ist offenbar $U_0 \equiv 0$. Dann ist

$$\frac{\partial^3 V_1}{\partial y^3}(\mu, f; x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{2at}{t-x} dt = \frac{4a}{\pi} \left(2 + x \lg \frac{1-x}{1+x} \right), \quad \frac{\partial^3 V_1}{\partial y^3}(\mu, f; 0, 0) = 6a.$$

Weiter ist

$$V_2(\mu, f; x, 0) = -\mu^2(x) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) - \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}(f; x, 0) \right) = a^2(x^2 - 1)^2 \quad \text{für} \quad |x| < 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial y}(\mu, f; x, 0) &= \mu^2(x) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, 0) - \frac{\partial^3 U_0}{\partial y^3}(f; x, 0) \right) - 2\mu(x) \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}(\mu, f; x, 0) \\ &= -2a(x^2 - 1) \frac{4a}{\pi} \left(2 + x \lg \frac{1-x}{1+x} \right) \quad \text{für} \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$V_2 = W_1 + W_2,$$

wobei die Funktionen W_1 resp. W_2 durch die Randbedingungen

$$\begin{aligned} W_1(x, 0) &= a^2(x^2 - 1)^2, \quad W_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial y}(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial W_2}{\partial y}(x, 0) &= -\frac{8a^2}{\pi} (x^2 - 1) \left(2 + x \lg \frac{1-x}{1+x} \right) \quad \text{für} \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

bestimmt sind. Wir erhalten

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}(0, 0) = -4a^2; \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{8a^2}{\pi} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[(x^2 - 1) \left(2 + x \lg \frac{1-x}{1+x} \right) \right] dx = \frac{32a^2}{\pi^2} \left[3 + \frac{\pi^2}{4} \right].$$

Also ist

$$K_{\lambda,t} = 1 + \frac{8a}{\pi} \lambda - 6\lambda^2 a^2 - 2a^2 \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{32a^2}{\pi^2} \left(3 + \frac{\pi^2}{4} \right) \dots \dots \dots (2,10).$$

Wir vereinfachen diesen Ausdruck. Es ist $\frac{1}{\varrho} = 2a$, $t = a$, $\frac{t}{\varrho} = 2a^2$, (Bild 3). Mit $\lambda = 1$ erhalten wir

$$K_{1,t} = K_t = 1 + \alpha \sqrt{\frac{t}{\varrho}} + \beta \frac{t}{\varrho},$$

wobei

$$\alpha = \frac{8}{\sqrt{2}\pi} \doteq 1,8, \quad \beta = \frac{8}{\pi^2} \left(3 + \frac{\pi^2}{4}\right) - 4 \doteq 0,42$$

ist. Ein Vergleich mit den Ergebnissen auf Bild 2 führt zu folgenden Schlußfolgerungen.

1. Die Approximation durch das erste Differential ergibt mindestens dieselbe Genauigkeit wie die Ergebnisse von NEUBER.

2. Für eine flache Kerbe geben die Formeln des ersten Differentials genauere Ergebnisse.

3. Zum Unterschied von der Theorie von NEUBER geben die Ergebnisse auf Grund des ersten Differentials die Möglichkeit, den Einfluß der Form auf den Konzentrationskoeffizienten genauer als mit Hilfe des Parameters t/ϱ zu bestimmen.

4. Es ist recht einfach, auch die Differentiale höherer Ordnung zu bestimmen. Für praktische Zwecke sind jedoch die Differentiale erster Ordnung ausreichend.

5. Für eine elliptische Kerbe mit der Hauptachse im Rand der Halbebene geben die Formeln für das Differential erster Ordnung dieselben Ergebnisse wie die Theorie von NEUBER.

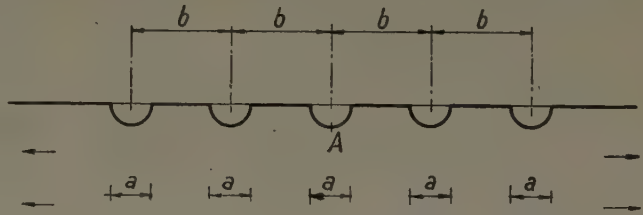


Bild 4. Eine Reihe von $2n+1$ Kreiskerben in der Halbebene ($n=2$)

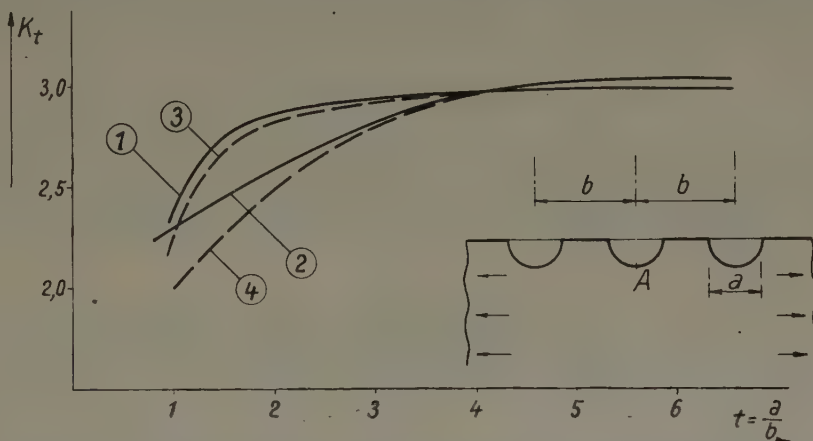


Bild 5. Konzentrationskoeffizient für eine Reihe von Kerben in Abhängigkeit von ihren Entfernungen
A — Punkt der Spannungskonzentration, ① die Lösung mit Hilfe des ersten Differentials für drei Kerben,
② die photoelastometrische Lösung für drei Kerben (nach [2]), ③ die Lösung mit Hilfe des ersten
Differentials für fünf Kerben, ④ die spannungsoptische Lösung für fünf Kerben (nach [2])

2.4. Wir untersuchen nun die Konzentrationsspannung für eine Reihe von Kreiskerben. Wir bestimmen den Konzentrationskoeffizienten für die mittlere Kerbe der Reihe von $2n+1$ Kerben (s. Bild 4). Nach den Ergebnissen der vorhergehenden Absätze bestimmen wir den Konzentrationskoeffizienten im Punkte A. Wir erhalten

$$K_n = 3 + Q_n,$$

wo

$$Q_n = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^n \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{x+pb} \frac{x}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - x^2}} dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[n\pi - \sum_{p=1}^n \frac{2p\alpha}{\sqrt{p^2\alpha^2 - \frac{1}{4}}} \left(\operatorname{arctg} \frac{p\alpha + \frac{1}{2}}{\sqrt{p^2\alpha^2 - \frac{1}{4}}} - \operatorname{arctg} \frac{p\alpha - \frac{1}{2}}{\sqrt{p^2\alpha^2 - \frac{1}{4}}} \right) \right]$$

und $\alpha = b/a$ ist. Auf Bild 5 ist der Verlauf für drei und fünf Kerben angedeutet. Auf derselben Abbildung sind auch die spannungsoptischen Ergebnisse von DURELLI, LAKE und PHILLIPS angedeutet (vgl. [2]).

2.5. Wir betrachten nun die Konzentrationsspannung in der Nähe der Kerben eines gezogenen Streifens. In den vorhergehenden Abschnitten haben wir uns mit der Problematik der Konzentrationsspannung in einer gezogenen Halbebene beschäftigt. In diesem Absatz deuten wir noch die Konzentrationsspannung in gezogenen Streifen an. Wir betrachten eine Kerbe in einem gezogenem Streifen von der Breite $2h$ (s. Bild 6). Der Gedankengang ist ähnlich wie in den vorhergehenden Abschnitten. Ω_0 ist nun statt einer Halbebene ein Streifen. Es ist daher notwendig von der FOURIERSchen Transformation auszugehen. Der Einfachheit halber werden wir uns nur mit den symmetrischen Kerben beschäftigen. Genauso wie in den vorhergehenden Abschnitten ist $U_0 \equiv 0$ und $K = 1 + Q$ wobei $Q = \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}(\mu, f; 0, 0)$. Die Funktion V_1 ist durch die Randbedingungen

$$V_1(\mu, f; x, \pm h) = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y}(\mu, f; \mp h) = \pm \mu(x), \quad f(x, y) = -\frac{1}{2}y^2$$

erfüllt. Dann ist

$$V_1(\mu, f; x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos xt \cos tz \frac{y \operatorname{ch} th \operatorname{sh} ty - h \operatorname{sh} th \operatorname{ch} ty}{\operatorname{sh} th \operatorname{ch} th + th} \mu(z) dz dt.$$

Darum ist

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}(\mu, f; x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos xt \cos tz \frac{2t \operatorname{ch}^2 th}{\operatorname{sh} th \operatorname{ch} th + th} \mu(z) dz dt.$$

Wir setzen

$$\mu(x) = a(x^2 - b^2) \quad \text{für} \quad |x| < b, \quad \mu(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| \geq b.$$

Dann ist

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos tz a(z^2 - b^2) dz = -4a \left(\frac{b \cos tb}{t^2} - \frac{\sin tb}{t^3} \right)$$

und

$$\begin{aligned} K_A &= 1 - \frac{8ab}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{ch}^2 th}{\operatorname{sh} th \operatorname{ch} th + th} \left(\frac{b \cos tb}{t^2} - \frac{\sin tb}{t^3} \right) dt \\ &= 1 - \frac{8ab}{\pi} - \frac{4a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - 2th + e^{-2th}}{\operatorname{sh} th \operatorname{ch} th + th} \left(\frac{b \cos tb}{t} - \frac{\sin tb}{t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

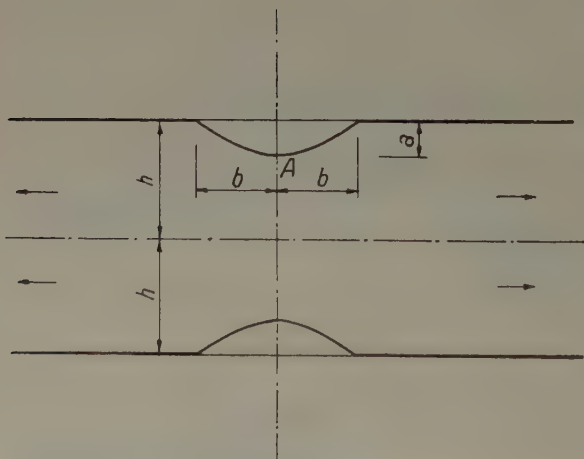


Bild 6. Ein Streifen mit zwei symmetrischen, parabolischen Kerben

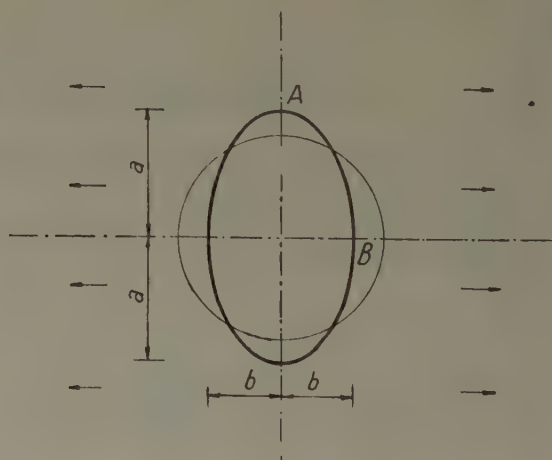


Bild 7. Eine durch eine elliptische Öffnung geschwächte Ebene. Hauptachse senkrecht zur Zugrichtung

3. Konzentrationsspannung in der Nähe einer elliptischen Öffnung

Auf ähnliche Weise wie in den vorhergehenden Absätzen können wir auch die Konzentrationsspannung in einer gezogenen Ebene, die durch eine Öffnung allgemeiner Art geschwächt ist, studieren. Wie im vorhergehenden Abschnitt das kanonische Gebiet eine Halbebene war, ist nun für diesen Fall das kanonische Grundgebiet das Äußere des Kreises. Wir führen nun

einige Ergebnisse für eine elliptische Öffnung an, wenn wir den Konzentrationskoeffizienten mit Hilfe von Differentialen höherer Ordnung für das Kreisgebiet berechnen (s. Bild 7). Der Konzentrationskoeffizient für eine Ebene, die durch eine elliptische Öffnung geschwächt ist, läßt sich leicht genau bestimmen.

In der folgenden Tabelle ist der Konzentrationskoeffizient in den Punkten A und B für das Achsenverhältnis der Ellipse $1 \div 1,5$ angegeben.

$\frac{a}{b}$	Punkt	Die exakte Lösung	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.
1,01	B	1,00	1,00015			
	A	3,0201	3,02001			
1,10	B	1,00	1,00319	1,00090	0,99999	
	A	3,2000	3,21570	3,19891	3,19999	
1,3	B	1,00	1,01811	1,01215	0,99679	
	A	3,600	3,73662	3,58158	3,59131	
1,5	B	1,00	1,02499	0,98651	0,84522	0,58451
	A	4,00	4,34503	3,86853	3,99509	4,30613

Aus der angeführten Tabelle lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Für kleine Exzentrizitäten drückt die Lösung mit Hilfe der Differentiale erster Ordnung die genaue Lösung sehr gut aus. Für größere Exzentrizitäten können Differentiale höherer Ordnung die Ergebnisse verschlechtern (die Reihe ist divergent). Auch für diesen Fall gibt jedoch die Lösung mit Hilfe der Differentiale erster resp. zweiter Ordnung für die Praxis ausreichende Ergebnisse.

In einer weiteren Arbeit werden wir die Fragen der Konvergenz der Folge, die aus den Lösungen mit Hilfe der einzelnen Differentiale gebildet wird, studieren.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden einige konkrete Anwendungen der allgemeinen Theorie kleiner Veränderungen des Definitionsgebietes auf Probleme der Konzentrationsspannung studiert. Es werden einige der einfachsten technischen Anwendungen ohne genauere Begründung angeführt. Die Behauptungen und ihre Beweise sind Gegenstand einer anderen Arbeit.

Literatur

- [1] H. NEUBER, Kerbspannungslehre, Berlin 1937, Springer-Verlag.
- [2] A. J. DURELLI, R. L. LAKE, E. PHILLIPS, Stress Concentrations Produced by Multiple Semi-Circular Notches in Infinite Plates under Uniaxial State Stress, Proc. SESA 10 (1952), p. 53.
- [3] R. E. PETERSON, Stress Concentration design Factors, New York 1953, John Wiley & Sons.
- [4] I. BABUŠKA, Die Abhängigkeit der Lösung der Elastizitätsprobleme von kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes, ZAMM 39 (1959), S. 411—412.
- [5] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинград 1950.
- [6] Я. С. Уфлянд, Биполярные координаты в теории упругости, Москва, 1950.

Manuskripteingang: 20. 12. 1960

Anschriften: Ing. Dr. IVO BABUŠKA, Praha-Dejvice, Glinkova 10, ČSSR,
J. KAUTSKÝ, Praha 1, Žitná 25, ČSSR

Über harmonische und isotrope stochastische Prozesse mit Fehlerschätzung für ein Differenzenverfahren*)

Von WERNER UHLMANN

Im ersten Teil werden stochastische Prozesse untersucht, bei denen jede Realisation eine harmonische Funktion ist. Insbesondere wird eine Spektraltheorie entwickelt. Im zweiten Teil werden isotrope Prozesse betrachtet und als Anwendung eine Fehlerschätzung für das gewöhnliche Differenzenverfahren bei der Poissonschen Differentialgleichung hergeleitet. Diese Fehlerschätzung wird an einem Beispiel erprobt.

In the first section stochastic processes are researched for which every realisation is a harmonic function. In particular a spectral theory is developed. In the second section isotropic processes are considered and as an application an error estimation is developed for the ordinary finite-difference method for the Poisson differential equation. This error estimation is tested by an example.

В первой части исследуются стохастические процессы, каждая реализация которых является гармонической функцией. В частности излагается спектральная теория. Во второй части рассматриваются изотропные процессы. В качестве применения выводится оценка погрешности обыкновенного разностного метода для дифференциального уравнения Пуассона. Оценка погрешности показана на примере.

1. Einleitung

In den letzten Jahren wurden verschiedentlich die stochastischen Prozesse herangezogen, um Probleme aus der praktischen Analysis zu behandeln. Dies geschieht um der Möglichkeit willen, statt einer einzigen numerischen Aufgabe (z. B. eine Integration, eine Anfangswertaufgabe bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung usw.) gleich eine Menge solcher Aufgaben auf einmal zu betrachten und die mittleren oder durchschnittlichen Eigenschaften der Näherungslösungen zu untersuchen. Man kann so u. a. zu Fehlerschätzungen gelangen, d. h. zu Aussagen darüber, wie groß bei häufiger Anwendung eines bestimmten Verfahrens der Fehler durchschnittlich ausfällt. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, stochastische Prozesse zu untersuchen, die in Zusammenhang stehen mit der ersten Randwert Aufgabe (DIRICHLET-Problem) bei der Poissonschen Differentialgleichung. Es bieten sich zwei Möglichkeiten für die zu machenden Voraussetzungen an, indem man nämlich Forderungen 1. an jede Realisation oder 2. an den Zufallsmechanismus (genauer an die Korrelationsfunktion) stellt.

Im Abschnitt 2 werden daher stochastische Prozesse untersucht, bei denen Δu für alle Realisationen u dieselbe Funktion ist. Man könnte auch allgemeiner eine elliptische Differentialgleichung benutzen, da im wesentlichen nur die eindeutige Lösbarkeit der 1. Randwert Aufgabe und der Randmaximumsatz für die Beweise herangezogen werden. Es werden eine Reihe von Eigenschaften solcher Prozesse bewiesen und eine Spektraltheorie entwickelt, um u. a. einen Überblick über die Menge aller solcher Prozesse zu gewinnen. Dabei wird von der Idee, die Kovarianzfunktion als Kern einer Integralgleichung zu deuten, Gebrauch gemacht (siehe dazu K. KARHUNEN [8], [9], SLUTSKY [16]). Von einer anderen Fragestellung her hat KAMPÉ DE FÉRIET [7] ähnliche Prozesse betrachtet.

Im Abschnitt 3 werden isotrope Prozesse behandelt, deren Korrelationsfunktion also nur vom Abstand der betreffenden Punkte abhängt. Die Korrelationsfunktion wurde im eindimensionalen Fall vollständig von KHINTCHINE [10] untersucht. Für den mehrdimensionalen Fall seien von den neueren Arbeiten K. ITÔ [3], S. ITO [4], A. M. JAGLOM [5], [6], A. M. OBUCHOW [11] und H. P. ROBERTSON [14] genannt, allerdings sind sie im wesentlichen im Hinblick auf die Turbulenztheorie geschrieben. Neben einem Abschnitt über die Existenz von isotropen Prozessen ist als Anwendung eine Fehlerschätzung für das gewöhnliche Differenzenverfahren bei hinreichend einfachen Gebieten in der Ebene hergeleitet. Für alle mit dem Differenzenverfahren zusammenhängenden Fragen sei auf das Buch von L. COLLATZ [1] verwiesen.

2. Harmonische Prozesse

2.1 Bezeichnungen und Definitionen

Es bezeichne $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, ... Punkte des n -dimensionalen euklidischen Raumes R_n und es sei $n \geq 2$.

*) Dieser Aufsatz ist die etwas gekürzte Habilitationsschrift des Verfassers, die von der math.-naturw. Fakultät der Universität Hamburg angenommen wurde (Referenten: Prof. Dr. L. SCHMETTERER, Prof. Dr. Dr. L. COLLATZ).

Es sei B ein offenes, beschränktes, zusammenhängendes Gebiet des R_n ; es sei \bar{B} die abgeschlossene Hülle von B und B^* die Menge der Randpunkte von B . Es sei B^* eine abgeschlossene, zusammenhängende, $(n-1)$ -dimensionale, stückweise glatte Hyperfläche.

Eine reellwertige Funktion $f(x)$ heißt harmonisch in B , wenn f in \bar{B} definiert und stetig ist und in B stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich besitzt und der LAPLACESchen Differentialgleichung $\Delta f = 0$ genügt.

Es sei (Ω, S, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum, d. h. es sei Ω ein beliebiger Raum, S eine σ -Algebra von Teilmengen von Ω und μ ein auf S definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß.

Es sei $u(x, \omega)$ ein reellwertiger stochastischer Prozeß, also eine für gewisse x aus dem R_n und alle $\omega \in \Omega$ definierte, reellwertige Funktion, die für jedes feste x eine S -meßbare Abbildung von Ω in den R_1 ist.

Definition 1: Ein reellwertiger stochastischer Prozeß $u(x, \omega)$ heißt harmonisch in B , wenn gilt:

1. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $u(x, \omega)$ als Funktion von x harmonisch in B .
2. Es existiert der Erwartungswert $E[u(x, \omega)] = \int_{\Omega} u(x, \omega) d\mu$, und es ist $E[u(x, \omega)] = 0$ für jedes $x \in \bar{B}$.
3. Für jedes $x \in \bar{B}$ und $y \in \bar{B}$ existiert

$$R(x, y) = E[u(x, \omega) u(y, \omega)] = \int_{\Omega} u(x, \omega) u(y, \omega) d\mu,$$

und $R(x, y)$ ist bei festem y als Funktion von x harmonisch in B .

$R(x, y)$ heißt die Kovarianzfunktion von $u(x, \omega)$.

Es ist $R(x, y) = R(y, x)$ und also ist $R(x, y)$ auch als Funktion von y harmonisch in B . $R(x, x)$ heißt die Streuungsfunktion von $u(x, \omega)$ und es ist $R(x, x) \geq 0$ und stetig in \bar{B} .

Man kann leicht die Untersuchung einer etwas weiteren Klasse von stochastischen Prozessen auf die Betrachtung von harmonischen Prozessen zurückführen. Es sei nämlich $v(x, \omega)$ ein stochastischer Prozeß. Als Funktion von x sei $v(x, \omega)$ stetig in \bar{B} und zweimal stetig partiell differenzierbar in B . Es existiere $E[v(x, \omega)^2]$ für jedes $x \in \bar{B}$. Die Anwendung des LAPLACE-Operators Δ auf $v(x, \omega)$ wie auch auf $v(x, \omega) v(y, \omega)$ sei vertauschbar mit der Bildung des Erwartungswertes. Wir setzen nun voraus, daß $\Delta v(x, \omega)$ unabhängig von ω ist. Dann ist $u(x, \omega) = v(x, \omega) - E[v(x, \omega)]$ ersichtlich ein harmonischer Prozeß. Insbesondere ist hier der Fall mit erfaßt, daß $v(x, \omega)$ als Funktion von x harmonisch ist, ohne daß $E[v(x, \omega)] = 0$ ist.

Als wesentliche Hilfsmittel für die Beweise des Abschnittes 2.2 werden die folgenden beiden Sachverhalte benutzt:

Für die Kovarianzfunktion $R(x, y)$ eines stochastischen Prozesses gilt die SCHWARZsche Ungleichung

$$R(x, y)^2 \leq R(x, x) R(y, y) \quad (1)$$

für alle x und y .

Für in B harmonische Funktionen gilt ein Randmaximumssatz: Jede in B harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und ihr Minimum nur auf dem Rand B^* an, es sei denn, daß die Funktion konstant ist.

Daraus folgt z. B. sofort, daß $R(x, y)$ in \bar{B} eindeutig bestimmt ist durch die Werte von $R(x, y)$ auf B^* .

2.2. Die Kovarianzfunktion harmonischer Prozesse

In diesem Abschnitt soll die Kovarianzfunktion ohne Heranziehung einer Spektraltheorie untersucht werden. Es wird gezeigt, daß für die Streuungsfunktion ein Randmaximumssatz gilt und daß sie subharmonisch ist. Weiter werden Prozesse behandelt, deren Streuung Quadrat einer harmonischen Funktion ist.

2.2.1. Zwei Beispiele

Es sei speziell Ω das Intervall $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ und μ das LEBESGUE-Maß über Ω . Weiter seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei harmonische Funktionen in einem Gebiet B und es sei $f_1(x) \geq 0$.

Dann ist $\omega f_1(x)$ mit $\omega \in \Omega$ ein harmonischer Prozeß mit $R(x, y) = \frac{1}{12} f_1(x) f_1(y)$. Ersichtlich gilt hier in (1) das Gleichheitszeichen, und $\sqrt{R(x, x)} = \frac{1}{\sqrt{12}} f_1(x)$ ist harmonisch in B .

Auch $\omega f_1(x) + \omega^3 f_2(x)$ ist ein harmonischer Prozeß. Hier ist

$$R(x, y) = \frac{1}{12} f_1(x) f_1(y) + \frac{1}{80} f_1(x) f_2(y) + \frac{1}{80} f_1(y) f_2(x) + \frac{1}{448} f_1(x) f_2(y),$$

und es gilt weder in (1) das Gleichheitszeichen, noch ist $\sqrt{R(x, x)}$ notwendig harmonisch.

2.2.2. Prozesse mit konstanter Streuungsfunktion

Wie im Abschnitt 3 näher erläutert werden wird, heißt ein stochastischer Prozeß isotrop, wenn seine Kovarianzfunktion $R(x, y)$ nur vom Abstand der Punkte x und y abhängt. Insbesondere ist dann die Streuungsfunktion $R(x, x)$ unabhängig von x . Um zu zeigen, daß ein harmonischer Prozeß nur in trivialen Fällen zugleich isotrop sein kann, beweisen wir:

Satz 1: Es sei $R(x, y)$ die Kovarianzfunktion eines harmonischen Prozesses $u(x, \omega)$ und es sei die Streuungsfunktion $R(x, x)$ unabhängig von x : $R(x, x) = c$ für jedes $x \in B$.

Für jedes $x \in \bar{B}$ und jedes $y \in \bar{B}$ ist dann $R(x, y) = c$ und

$$E[(u(x, \omega) - u(y, \omega))^2] = 0 \quad \text{d. h. aber} \quad \mu(\{\omega: u(x, \omega) = u(y, \omega)\}) = 1.$$

Beweis: Aus (1) folgt, daß $|R(x, y)| \leq c$ ist. Wegen des Randmaximumssatzes für harmonische Funktionen ergibt sich $R(x, y) = c$ für alle $x, y \in \bar{B}$. Weiter ist

$$E[(u(x, \omega) - u(y, \omega))^2] = R(x, x) - 2R(x, y) + R(y, y) = 0,$$

und die letzte Behauptung folgt damit sofort aus der Ungleichung von TSCHEBYSCHEFF. ■

Man vergleiche hiermit auch die letzte Folgerung im Abschnitt 3.1.3.

2.2.3. Eigenschaften der Streuungsfunktion

Da das Quadrat einer harmonischen Funktion nicht notwendig harmonisch ist, folgt aus dem ersten Beispiel im Abschnitt 2.2.1., daß die Streuungsfunktion $R(x, x)$ nicht notwendig eine harmonische Funktion von x ist. Trotzdem läßt sich für $R(x, x)$ ein Randmaximumssatz beweisen, der über den Randmaximumssatz für subharmonische Funktionen hinausgeht (siehe etwa [13]).

Satz 2: Es sei $R(x, x)$ die Kovarianzfunktion eines harmonischen Prozesses. Wenn es ein $x_0 \in B$ gibt mit $R(x, x) \leq R(x_0, x_0)$ für jedes $x \in \bar{B}$, so ist $R(x, x) = R(x_0, x_0)$ für jedes $x \in \bar{B}$.

Beweis: Aus (1) folgt hier $-R(x_0, x_0) \leq R(x, x_0) \leq R(x_0, x_0)$. Nun ist $R(x, x_0)$ eine in B harmonische Funktion von x , die für ein x aus B , nämlich $x = x_0$, ihr Maximum annimmt. Nach dem Randmaximumssatz ist daher $R(x, x_0) = R(x_0, x_0)$ für jedes $x \in \bar{B}$.

Weiter ist $0 \leq R(x, y)^2 \leq R(x, x)R(y, y) \leq R(x_0, x_0)^2$ und also $-R(x_0, x_0) \leq R(x, y) \leq R(x_0, x_0)$.

$R(x, y)$ ist als Funktion von y ebenfalls harmonisch in B und nimmt sein Maximum $R(x_0, x_0)$ für $y = x_0 \in B$ an. Wie eben folgt daraus, daß $R(x, y) = R(x, x_0) = R(x_0, x_0)$ für alle $x, y \in \bar{B}$ ist, also erst recht für $x = y$. ■

Daß sich ein entsprechender Satz für das Minimum nicht beweisen läßt, zeigt das erste Beispiel von 2.2.1. mit $B = \text{Einheitskreis im } R_2$ und $f_1(x) = x_1$, dabei ist $x = (x_1, x_2)$. Dann ist $R(x, x) = \frac{1}{12} x_1^2$, und also nimmt R zwar sein Maximum nur auf dem Rand B^* , aber sein Minimum auch im Innern an.

Wir nennen in der üblichen Weise eine in B stetige Funktion $g(x)$ subharmonisch, wenn für jede offene Kugel $G \subseteq B$ und jede in G harmonische Funktion $f(x)$ mit $f(x) \geq g(x)$ auf dem Rand von G folgt, daß $f(x) \geq g(x)$ ist in ganz G . Es sei bemerkt, daß eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $g(x)$ genau dann subharmonisch ist, wenn $\Delta g(x) \geq 0$ ist. Mit Hilfe dieses Kriteriums rechnet man für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $g(x)$ sofort nach, daß $g(x)^2$ subharmonisch ist, falls $g(x)$ subharmonisch und $g(x) \geq 0$ ist; es ist dann nämlich

$$\Delta(g(x))^2 = 2 \sum \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 + 2g \Delta g \geq 0.$$

Satz 3: Es sei $R(x, x)$ die Streuungsfunktion eines in B harmonischen Prozesses $u(x, \omega)$. Dann sind $\sqrt{R(x, x)}$ und $R(x, x)$ beide subharmonisch.

Beweis: Wegen der obigen Bemerkung genügt es zu zeigen, daß $\sqrt{R(x, x)}$ subharmonisch ist. Es sei $G \subseteq B$ eine offene Kugel, G^* der Rand von G , $f(x)$ harmonisch in G und $\sqrt{R(x, x)} \leq f(x)$ auf G^* . Wegen (1) ist $R(x, y) \leq f(x) \sqrt{R(y, y)}$ für $x \in G^*$ und $y \in G$.

Mit Hilfe des Randmaximumssatzes für harmonische Funktionen folgt daraus $R(x, y) \leq f(x) \sqrt{R(y, y)}$ für $x \in G$, $y \in G$ und insbesondere $0 \leq R(x, x) \leq f(x) \sqrt{R(x, x)}$ für $x \in G$. ■

2.2.4. Abschätzungen für die Kovarianzfunktion

Aus der SCHWARZschen Ungleichung (1) und dem Randmaximumssatz für harmonische Funktionen folgt unmittelbar:

Satz 4: Es sei $R(x, y)$ die Kovarianzfunktion eines in B harmonischen Prozesses und es seien c_1, c_2, c_3 reelle Zahlen. Wenn $c_1 \leq R(x, y) \leq c_2$ ist für alle x und y aus B^* , so gilt diese Ungleichung auch für alle x und y aus B . Wenn $R(x, x) \leq c_3$ ist für alle $x \in B^*$, so ist $|R(x, y)| \leq c_3$ für alle x und y aus \bar{B} .

Die Bedeutung einer Nullstelle der Streuungsfunktion zeigt folgender

Satz 5: Es sei $R(x, y)$ die Kovarianzfunktion eines in B harmonischen Prozesses. Wenn es ein $x_0 \in B$ gibt mit $R(x_0, x_0) = 0$, so nimmt $R(x, y)$ auch negative Werte an oder es ist $R(x, y) = 0$ für alle x und y aus B .

Beweis: Es sei stets $R(x, y) \geq 0$. Aus (1) folgt $0 \leq R(x, x_0) \leq \sqrt{R(x, x) R(x_0, x_0)} = 0$ und folglich ist $R(x, x_0) = 0$ für alle $x \in B$. $R(x, y)$ ist als Funktion von y harmonisch und nimmt sein Minimum auch im Innern, nämlich für $y = x_0$ an; daher ist $R(x, y)$ unabhängig von y und also $\equiv 0$. ■

2.2.5. Prozesse, deren Streuungsfunktion Quadrat einer harmonischen Funktion ist

Wir wollen zeigen, daß die harmonischen Prozesse, deren Streuungsfunktion Quadrat einer harmonischen Funktion ist, im wesentlichen sich darstellen lassen als Produkt einer harmonischen Funktion und einer zufälligen Variablen. Dazu untersuchen wir zunächst, wann in der SCHWARZschen Ungleichung (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Es sei also wieder $R(x, y)$ die Kovarianzfunktion eines in B harmonischen Prozesses $u(x, \omega)$.

Satz 6: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (I) Es ist $R(x, y)^2 = R(x, x) R(y, y)$ für alle x und y aus \bar{B} .
- (II) Es gibt eine in B harmonische Funktion $f(x)$ mit $R(x, y) = f(x) f(y)$ für alle x und y aus \bar{B} .
- (III) Es gibt eine in B harmonische Funktion $f(x)$ mit $R(x, x) = f(x)^2$ für alle $x \in \bar{B}$.

Anmerkung: In (II) und (III) steht dieselbe harmonische Funktion.

Beweis:

„(II) \Rightarrow (I)“: Trivial.

„(I) \Rightarrow (II)“: Da die Behauptung im Falle $R(x, x) \equiv 0$ trivial ist, wollen wir voraussetzen, daß es ein $x_0 \in B$ gibt mit $R(x_0, x_0) > 0$.

Wir setzen

$$f(x) = \frac{R(x, x_0)}{\sqrt{R(x_0, x_0)}}.$$

Dann ist $f(x)$ harmonisch in B und es ist

$$\begin{aligned} f(x) f(y) &= \frac{R(x, x_0) R(y, x_0)}{R(x_0, x_0)} = \sqrt{R(x, x)} \sqrt{R(y, y)} \operatorname{sgn} (R(x, x_0) R(y, x_0)) \\ &= R(x, y) \operatorname{sgn} (R(x, x_0) R(y, x_0) R(x, y)). \end{aligned}$$

Wir setzen $g(x, y) = R(x, y) - f(x) f(y)$. Sicher gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $R(x, y) > 0$ für alle $x \in U$ und $y \in U$. Für alle diese x, y ist ersichtlich $g(x, y) = 0$. Da $g(x, y)$ als Funktion von x harmonisch ist, folgt, daß $g(x, y) = 0$ ist für $x \in \bar{B}$ und $y \in U$. Da $g(x, y)$ auch als Funktion von y harmonisch ist, folgt daraus die Behauptung.

„(II) \Rightarrow (III)“: Trivial.

„(III) \Rightarrow (II)“: Es sei also $f(x)$ harmonisch in B und $f(x)^2 = R(x, x)$. Wegen (1) ist $|R(x, y)| \leq |f(x) f(y)|$. Für jedes $y \in B$ mit $f(y) = 0$ ist daher $R(x, y) = 0$ für alle $x \in B$ und also $f(x) f(y) = R(x, y)$. Sei nun $y \in B$ mit $f(y) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von y mit $f(x) > 0$ für alle $x \in U$ oder $f(x) < 0$ für alle $x \in U$ und also $f(x) f(y) > 0$ für alle $x \in U$. Daher ist $R(x, y) - f(x) f(y) \leq 0$ für alle $x \in U$ und $= 0$ für $x = y$. Da $R(x, y) - f(x) f(y)$ als Funktion von x harmonisch ist, folgt aus dem Randmaximumssatz, daß $R(x, y) - f(x) f(y) = 0$ ist für alle $x \in U$, und daraus folgt weiter, daß $R(x, y) = f(x) f(y)$ ist für alle x und y aus \bar{B} . ■

Die Bedingung (I) im obigen Satz läßt sich noch etwas abschwächen.

Satz 7: Es sei $R(x, x_0)^2 = R(x, x) R(x_0, x_0)$ für alle $x \in B$ und mindestens ein $x_0 \in B$ mit $R(x_0, x_0) > 0$.

Dann ist $R(x, y)^2 = R(x, x) R(y, y)$ für alle x und y aus B .

Beweis: Wir setzen

$$f(x) = \frac{R(x, x_0)}{+\sqrt{R(x_0, x_0)}} = +\sqrt{R(x, x)} \operatorname{sgn} R(x, x_0).$$

Dann ist $f(x)$ harmonisch in B und $f(x)^2 = R(x, x)$ und damit folgt die Behauptung aus Satz 6. ■

Daß man in diesem Satz nicht auf die Bedingung $R(x_0, x_0) > 0$ verzichten kann, zeigt das zweite Beispiel in 2.2.1., wenn man dort $f_1(x)$ und $f_2(x)$ linear unabhängig wählt, aber mit einer gemeinsamen Nullstelle x_0 .

Wenn $R(x, y)$ stets nicht-negativ ist, so läßt sich der Satz 6 und sein Beweis wesentlich vereinfachen.

Satz 8: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(I) Es ist $R(x, y) = +\sqrt{R(x, x)} +\sqrt{R(y, y)}$ für alle x und y aus B .

(II) $+\sqrt{R(x, x)}$ ist als Funktion von x harmonisch in B .

Beweis:

„(I) \Rightarrow (II)“: Für $R(x, x) \equiv 0$ ist die Behauptung trivial, und wenn es ein x_0 mit $R(x_0, x_0) > 0$ gibt, so ist $+\sqrt{R(x, x)}$ harmonisch wegen

$$+\sqrt{R(x, x)} = \frac{R(x, x_0)}{+\sqrt{R(x_0, x_0)}}.$$

„(II) \Rightarrow (I)“: Es ist $R(x, y) - +\sqrt{R(x, x)} +\sqrt{R(y, y)}$ eine harmonische Funktion von x , die wegen der SCHWARZSchen Ungleichung ≤ 0 ist und für $x = y$ verschwindet. Damit folgt die Behauptung aus dem Randmaximumssatz für harmonische Funktionen. ■

Es sei $f(x)$ eine harmonische Funktion in B und $h(\omega)$ eine zufällige Variable über dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, μ) mit Mittelwert 0 und existierender Streuung $\sigma^2 < +\infty$. Dann ist $f(x) h(\omega)$ offensichtlich ein in B harmonischer Prozeß, dessen Streuungsfunktion gleich $(\sigma f(x))^2$ und also Quadrat einer harmonischen Funktion ist. Wir wollen nun umgekehrt zeigen, daß alle harmonischen Prozesse, deren Streuungsfunktionen Quadrate harmonischer Funktionen sind, im wesentlichen darstellbar sind als Produkt von harmonischer Funktion und zufälliger Variablen.

Satz 9: Es existiere eine in B harmonische Funktion $f(x)$ mit $f(x)^2 = R(x, x)$. Dann gibt es eine zufällige Variable $h(\omega)$ mit Mittelwert 0 und existierender Streuung derart, daß

$$u(x, \omega) = f(x) h(\omega)$$

ist für jedes $x \in \bar{B}$ und jedes $\omega \in \Omega'$, wobei Ω' unabhängig von x und $\mu(\Omega') = 1$ ist.

Beweis: Wenn $f(x) \equiv 0$ ist, so ist die Behauptung erfüllt für $h(\omega) \equiv 0$. Es existiere also ein $x_0 \in \bar{B}$ mit $f(x_0) \neq 0$. Wir setzen $h(\omega) = u(x_0, \omega)/f(x_0)$. Evident ist $E[h(\omega)] = 0$, $E[h(\omega)^2] = 1$ und $E[u(x, \omega) - f(x) h(\omega)] = 0$ für jedes $x \in \bar{B}$. Nach Satz 6 ist $R(x, y) = f(x) f(y)$ und damit ergibt sich $E[(u(x, \omega) - f(x) h(\omega))^2] = 0$ für jedes $x \in \bar{B}$. Also ist $u(x, \omega) = f(x) h(\omega)$ bis auf eine zunächst eventuell noch von x abhängige μ -Nullmenge Ω_x aus Ω . Wir setzen $\Omega' = \Omega - \bigcup \Omega_x$, wobei die Vereinigungsmenge zu bilden ist über alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{B}$ mit rationalen x_i . Dann ist $\mu(\Omega') = 1$ und $u(x, \omega) = f(x) h(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega'$ und alle $x \in B$ mit rationalen x_i . Da $u(x, \omega)$ und $f(x)$ als Funktionen von x stetig sind in \bar{B} , folgt daraus die Behauptung. ■

2.3. Spektraltheorie für harmonische Prozesse

Durch die Deutung der Kovarianzfunktion als Kern einer Integralgleichung gelangt man zu Eigenfunktionen, die auf dem Rand B^* definiert sind. Mit Hilfe dieser Eigenfunktionen lassen sich die Kovarianzfunktion und auch die einzelnen Realisationen eines harmonischen Prozesses darstellen. Außerdem gewinnt man einen Überblick über die Menge aller in B harmonischen Prozesse. Die benutzten Sätze aus der Theorie der Integralgleichungen finden sich z. B. bei ZAAZEN [18] und auch bei PETROVSKIJ [12].

2.3.1. Darstellung der Kovarianzfunktion durch Eigenfunktionen

Wir betrachten wieder einen in B harmonischen Prozeß $u(x, \omega)$, wie er in 2.1 definiert ist.

Wir setzen voraus, daß der Rand B^* in der Form

$$B^* = \{(x_1(t), \dots, x_n(t)) : t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in C\}$$

darstellbar ist, wobei C eine beschränkte, abgeschlossene, LEBESGUE-meßbare Teilmenge des $(n-1)$ -dimensionalen euklidischen Raumes ist und die Funktionen $x_i(t)$ stetig sind. Zur Abkürzung schreiben wir $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Wir setzen weiter voraus, daß B so beschaffen ist, daß für jede auf B^* definierte, stetige Funktion $g(x)$ die zugehörige erste Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist, d. h. daß es eine in B harmonische Funktion $f(x)$ gibt mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in B^*$.

Wir betrachten zunächst den harmonischen Prozeß $u(x, \omega)$ auf dem Rande B^* und setzen dazu

$$u^*(t, \omega) = u(x(t), \omega) \quad \text{für } t \in C \text{ und } \omega \in \Omega.$$

Dann ist $u^*(t, \omega)$ ein stochastischer Prozeß mit Mittelwert $E[u^*(t, \omega)] = 0$ für alle $t \in C$ und Kovarianzfunktion

$$R^*(t, s) = E[u^*(t, \omega) u^*(s, \omega)] = \int_{\Omega} u^*(t, \omega) u^*(s, \omega) d\mu = R(x(t), x(s)) \quad (2)$$

und es sei $R^*(t, s) \equiv 0$. (Der Fall $R(t, s) \equiv 0$ ist trivial und würde in den folgenden Sätzen nur uninteressante Fallunterscheidungen erfordern.)

Aus den Voraussetzungen über $R(x, y)$ folgt, daß $R^*(t, s)$ stetig in beiden Variablen t und s aus C ist. Außerdem ist

$$R^*(t, s) = R^*(s, t).$$

Wir setzen weiter voraus, daß $u^*(t, \omega)^2$ integrierbar ist in bezug auf das Produktmaß, das gebildet wird aus dem LEBESGUE-Maß (für die Integration bezüglich t) und dem Wahrscheinlichkeitsmaß μ (für die Integration bezüglich ω).

Wir fassen nun die Kovarianzfunktion $R^*(t, s)$ als Kern einer Integralgleichung auf:

$$\int_C R^*(t, s) \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t) \quad (3).$$

Es gibt mindestens einen und höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte. Es sei λ ein Eigenwert und $\varphi(t)$ eine zugehörige Eigenfunktion. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda \int_C \varphi(t)^2 dt &= \int_C \int_C R^*(t, s) \varphi(s) \varphi(t) dt ds \\ &= \int_C \int_{\Omega} \int_{\Omega} u^*(t, \omega) u^*(s, \omega) \varphi(s) \varphi(t) d\mu dt ds = \int_{\Omega} \left(\int_C (u^*(t, \omega) \varphi(t) dt)^2 \right) d\mu \geq 0. \end{aligned}$$

Also sind alle Eigenwerte ≥ 0 , d. h. $R^*(t, s)$ ist als Transformation positiv. Es gilt daher der Satz von MERCER, d. h. es ist

$$R^*(t, s) = \sum_i \lambda_i \varphi_i^*(t) \varphi_i^*(s) \quad (4),$$

und die Reihe auf der rechten Seite ist absolut und gleichmäßig konvergent für alle t und s aus C ; die λ_i sind dabei die Eigenwerte, die > 0 sind, und die $\varphi_i^*(t)$ sind die zugehörigen, orthonormierten Eigenfunktionen von $R^*(t, s)$.

Wie Beispiele zeigen, kann auch 0 ein Eigenwert sein, nur treten natürlich die zu 0 gehörigen Eigenfunktionen nicht in (4) auf.

Jeder Funktion $\varphi_i^*(t)$, die sich wegen (2) und (3) auch als stetige Funktion auf B^* auffassen läßt, ordnen wir nun die nach Voraussetzung eindeutig bestimmte, in B harmonische Funktion $\varphi_i(x)$ zu, für die

$$\varphi_i(x(t)) = \varphi_i^*(t)$$

für alle $t \in C$ ist. Mit Hilfe dieser Funktionen $\varphi_i(x)$ und den Eigenwerten λ_i läßt sich nun auch die ursprüngliche Kovarianzfunktion $R(x, y)$ des in B harmonischen Prozesses $u(x, \omega)$ darstellen.

Satz 10: Für alle x und y aus B ist die Reihe $\sum_i \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ gleichmäßig konvergent, und es ist

$$R(x, y) = \sum_i \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y) \quad (5).$$

Beweis: Wenn die Reihe endlich ist, ist der Satz trivial, weil rechts und links harmonische Funktionen stehen, die wegen (4) auf dem Rand B^* übereinstimmen. Die Reihe sei nun also unendlich. Wegen (4) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ unabhängig von t und s mit

$$\left| R^*(t, s) - \sum_{i \leq m} \lambda_i \varphi_i^*(t) \varphi_i^*(s) \right| < \varepsilon \quad \text{falls } m > N(\varepsilon).$$

Da $R(x, y) - \sum_{i \leq m} \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ harmonisch in x und in y ist, kann man den Randmaximumssatz anwenden, und es gibt also ein $x_0 \in B^*$ und ein $y_0 \in B^*$ mit

$$\left| R(x, y) - \sum_{i \leq m} \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y) \right| \leq \left| R(x_0, y) - \sum_{i \leq m} \lambda_i \varphi_i(x_0) \varphi_i(y) \right| \leq \left| R(x_0, y_0) - \sum_{i \leq m} \lambda_i \varphi_i(x_0) \varphi_i(y_0) \right| \leq \varepsilon,$$

falls nur $m > N(\varepsilon)$. ■

In Ergänzung zu den Abschnitten 2.2.3. und 2.2.5. sei bemerkt, daß aus Satz 10 folgt, daß sich die Streuungsfunktion $R(x, x)$ als Reihe schreiben läßt, deren Summanden Quadrate von harmonischen Funktionen, nämlich $\sqrt{\lambda_i} \varphi_i(x)$, sind:

$$R(x, x) = \sum_i \lambda_i \varphi_i(x)^2 \dots \dots \dots (6).$$

2.3.2. Vorgabe einer Folge von harmonischen Funktionen für die Kovarianzfunktion

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß es unter selbstverständlichen Konvergenzvor- aussetzungen zu vorgegebenen orthonormierten Funktionen φ_i und vorgegebenen reellen Zahlen $\lambda_i > 0$ stets mindestens einen harmonischen Prozeß gibt, dessen Kovarianzfunktion gerade durch (5) wiedergegeben wird.

Wir setzen voraus, daß das Gebiet B und die Parameterdarstellung des Randes B^* alle Forderungen erfüllen, die in den Abschnitten 2.1. und 2.3.1. angegeben sind.

Vorgegeben seien endlich oder abzählbar unendlich viele in B harmonische Funktionen $\varphi_i(x)$ und reelle Zahlen $\lambda_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$ oder $i = 1, 2, 3, \dots$). Unter Benutzung der Bezeichnungen von 2.3.1. setzen wir

$$\varphi_i^*(t) = \varphi_i(x(t)) \quad \text{für alle } t \in C.$$

Wir setzen voraus, daß die $\varphi_i^*(t)$ orthonormiert sind:

$$\int_C \varphi_i^*(t) \varphi_k^*(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

und daß

$$\sum_i \lambda_i \varphi_i^*(t) \varphi_i^*(s)$$

absolut und gleichmäßig konvergent ist für alle t und s aus C .

Die zweite Voraussetzung ist ersichtlich zum Beispiel dann erfüllt, wenn $\sum \lambda_i$ konvergent ist und die $\varphi_i^*(t)$ dem Betrage nach gleichmäßig beschränkt sind.

Satz 11: Unter den angegebenen Voraussetzungen gibt es mindestens einen in B harmonischen Prozeß $u(x, \omega)$ mit Kovarianzfunktion

$$E[u(x, \omega) u(y, \omega)] = \sum_i \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y)$$

für alle x und y aus \bar{B} .

Beweis: Wir führen den Beweis durch explizite Angabe eines passenden harmonischen Prozesses $u(x, \omega)$.

Nach Voraussetzung ist $\sum \lambda_i \varphi_i^*(t) \varphi_i^*(s)$ und damit erst recht $\sum \lambda_i \varphi_i^*(t)^2$ gleichmäßig kon- vergent. Durch Integration folgt, daß $\sum \lambda_i$ konvergent ist. Wir setzen $\sum \lambda_i = \lambda$.

Weiter setzen wir

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right], \\ S_1 &= \sigma\text{-Algebra der BOREL-Teilmengen von } \Omega_1, \\ \mu_1 &= \text{LEBESGUE-Maß über } S_1, \\ \Omega_2 &= \text{Menge der natürlichen Zahlen } m \text{ mit } 0 < m \leq N \text{ bzw. } m > 0, \\ S_2 &= \text{Menge aller Teilmengen von } \Omega_2, \\ \mu_2 &= \text{nicht-negatives, total-additives Ma\ss auf } S_2 \text{ mit } \mu_2(m) = \frac{\lambda_m}{\lambda}. \end{aligned}$$

Dann ist $(\Omega, S, \mu) = (\Omega_1 \times \Omega_2, S_1 \times S_2, \mu_1 \times \mu_2)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für alle $x \in \bar{B}$ und alle $\omega = (\omega_1, m) \in \Omega$ definieren wir

$$u(x, \omega) = \sqrt{12/\lambda} \omega_1 \varphi_m(x) \dots \dots \dots (7).$$

Ersichtlich ist $u(x, \omega)$ als Funktion von x in B harmonisch und als Funktion von $\omega = (\omega_1, m)$ eine S -meßbare Abbildung von Ω in den R_1 .

Da die Teilsummen von $\sum \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ in x und y harmonische Funktionen sind, für die also der Randmaximumssatz gilt, folgt aus unseren Voraussetzungen die gleichmäßige Konvergenz von $\sum \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ für alle x und y aus \bar{B} , und die Reihe ist als Funktion von x und ebenso von y harmonisch in B .

Daraus folgt weiter die μ_2 -Integrierbarkeit von $\varphi_m(x)^2$:

$$\int_{\Omega_2} \varphi_m(x)^2 d\mu_2 = \sum_m \frac{\lambda_m}{\lambda} \varphi_m(x)^2.$$

Außerdem ist natürlich $(\sqrt{12\lambda}\omega_1)^2$ bezüglich μ_1 integrierbar und daher ist $u(x, \omega)^2$ und also erst recht $u(x, \omega) u(y, \omega)$ und $u(x, \omega)$ bezüglich μ integrierbar. Da

$$\int_{\Omega_1} \omega_1 d\mu_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \omega_1 d\omega_1 = 0$$

ist, folgt nach dem Satz von FUBINI, daß

$$E[u(x, \omega)] = \int_{\Omega} u(x, \omega) d\mu = 0$$

ist für alle $x \in \bar{B}$. Schließlich ergibt sich noch:

$$E[u(x, \omega) u(y, \omega)] = \int_{\Omega} u(x, \omega) u(y, \omega) d\mu = 12\lambda \int_{\Omega_1} \omega_1^2 d\mu_1 \int_{\Omega_2} \varphi_m(x) \varphi_m(y) d\mu_2 = \sum_m \lambda_m \varphi_m(x) \varphi_m(y). \blacksquare$$

2.3.3. Darstellung des harmonischen Prozesses

Es seien die Voraussetzungen des Abschnittes 2.3.1. erfüllt, dessen Bezeichnungen wir auch hier benutzen.

Zu jeder Eigenfunktion $\varphi_i^*(t)$ mit Eigenwert $\lambda_i > 0$ von $R^*(t, s)$ existiert das folgende Integral

$$a_i(\omega) = \int_C u^*(t, \omega) \varphi_i^*(t) dt \quad (8).$$

Die $a_i(\omega)$ sind zufällige Variable mit Erwartungswert

$$E[a_i(\omega)] = \int_{\Omega} \int_C u^*(t, \omega) \varphi_i^*(t) dt d\mu = \int_C \varphi_i^*(t) \int_{\Omega} u^*(t, \omega) d\mu dt = 0$$

und Kovarianz

$$\begin{aligned} E[a_i(\omega) a_k(\omega)] &= \int_C \int_C \int_{\Omega} u^*(t, \omega) \varphi_i^*(t) u^*(s, \omega) \varphi_k^*(s) d\mu dt ds \\ &= \int_C \int_C R^*(t, s) \varphi_i^*(t) \varphi_k^*(s) dt ds = \lambda_k \int_C \varphi_i^*(t) \varphi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ \lambda_k & \text{für } i = k \end{cases} \quad (9). \end{aligned}$$

Weiter ist für jedes $s \in C$

$$E[a_i(\omega) u^*(s, \omega)] = \int_C \int_{\Omega} u^*(t, \omega) \varphi_i^*(t) u^*(s, \omega) d\mu dt = \int_C R^*(t, s) \varphi_i^*(t) dt = \lambda_i \varphi_i^*(s) \quad (10).$$

Wir wollen nun zeigen, daß man den harmonischen Prozeß $u(x, \omega)$ in eine Reihe entwickeln kann, deren Glieder Produkte aus unkorrelierten zufälligen Variablen und harmonischen Funktionen sind.

Satz 12: Wenn nur endlich viele Eigenwerte $\lambda_i > 0$ von $R^*(t, s)$ existieren, so ist für jedes $x \in \bar{B}$

$$u(x, \omega) = \sum_i a_i(\omega) \varphi_i(x)$$

für alle $\omega \in \Omega$ bis auf eine μ -Nullmenge, die unabhängig von x ist.

Beweis: Da zu jedem $\lambda_i > 0$ nur endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen existieren, ist die Reihe endlich. Für jedes $s \in C$ ist wegen (9) und (10) und Satz 10:

$$E[(u^*(s, \omega) - \sum_i a_i(\omega) \varphi_i^*(s))^2] = R^*(s, s) - 2 \sum_i \lambda_i \varphi_i^*(s)^2 + \sum_i \lambda_i \varphi_i^*(s)^2 = 0.$$

Also ist $u(x, \omega) = \sum a_i(\omega) \varphi_i(x)$ für jedes feste $x \in B^*$ und alle $\omega \in \Omega$ bis auf eine μ -Nullmenge $\Omega_x \subseteq \Omega$, die zunächst noch von x abhängen kann. Es sei nun Ω_0 die Vereinigungsmenge aller Ω_x , für die $x \in B^*$ rationale Koordinaten hat. Dann ist $\mu(\Omega_0) = 0$ und $u(x, \omega) = \sum a_i(\omega) \varphi_i(x)$ für alle $x \in B^*$ mit rationalen Koordinaten und $\omega \in \Omega - \Omega_0$. Wegen der Stetigkeit in x folgt, daß $u(x, \omega) = \sum a_i(\omega) \varphi_i(x)$ ist für alle $x \in B^*$ und alle $\omega \in \Omega - \Omega_0$. Da rechts und links harmonische Funktionen von x stehen, folgt daraus sofort die Behauptung. \blacksquare

Satz 13: Wenn abzählbar unendlich viele Eigenwerte $\lambda_i > 0$ von $R^*(t, s)$ existieren, so konvergiert die Reihe

$$\sum_i a_i(\omega) \varphi_i(x)$$

für jedes $x \in \bar{B}$ im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Quadratmittel gegen $u(x, \omega)$, d. h. es ist

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E \left[\left(u(x, \omega) - \sum_{i=1}^M a_i(\omega) \varphi_i(x) \right)^2 \right] = 0.$$

Beweis: Nach Definition der Eigenfunktionen ist

$$\int_C R^*(s, t) \varphi_i^*(t) dt = \lambda_i \varphi_i^*(s)$$

für alle $s \in C$, oder in anderer Schreibweise

$$\int_C R(y, x(t)) \varphi_i^*(t) dt = \lambda_i \varphi_i(y)$$

für alle $y \in B^*$. Geht man zu den zugehörigen harmonischen Funktionen über, so sieht man, daß diese Gleichung auch für alle $y \in \bar{B}$ gilt. Daraus folgt zusammen mit (9) und (10) für alle $x \in \bar{B}$

$$\begin{aligned} E \left[\left(u(x, \omega) - \sum_{i=1}^M a_i(\omega) \varphi_i(x) \right)^2 \right] &= R(x, x) - 2 \sum_{i=1}^M \varphi_i(x) \int_{\Omega} \int_C u^*(t, \omega) \varphi_i^*(t) u(x, \omega) dt d\mu + \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi_i(x)^2 \\ &= R(x, x) - 2 \sum_{i=1}^M \varphi_i(x) \int_C R(x, y(t)) \varphi_i^*(t) dt + \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi_i(x)^2 = R(x, x) - \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi_i(x)^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit Satz 10 folgt hieraus sofort die Behauptung. ■

2.3.4. Stationarität auf dem Rande im zweidimensionalen Fall

Bevor wir die obigen Untersuchungen auf den Fall spezialisieren, daß das Gebiet B zweidimensional ist, wollen wir einen Satz über im R_1 definierte, stationäre Prozesse mit periodischer Korrelationsfunktion beweisen.

Es sei $v(\tau, \omega)$ ein reellwertiger stochastischer Prozeß, der definiert ist für alle reellen τ und alle $\omega \in \Omega$, wobei (Ω, S, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist. Es existiere $E[v(\tau, \omega)^2]$ und es sei $E[v(\tau, \omega)] = 0$ für alle τ . Man nennt $v(\tau, \omega)$ stationär (genauer: stationär im weiteren Sinne), wenn die Kovarianzfunktion $E[v(\tau, \omega) v(\sigma, \omega)]$ nur von $\tau - \sigma$ abhängt und stetig ist. Da dann die Streuungsfunktion konstant ist, bezeichnet man im allgemeinen die Kovarianzfunktion auch als Korrelationsfunktion. Wir setzen $E[v(\tau, \omega) v(\sigma, \omega)] = K(\tau - \sigma)$.

Satz 14: Für die Korrelationsfunktion $K(\tau)$ eines im R_1 definierten, stationären Prozesses sind folgende Aussagen äquivalent:

- (I) $K(\tau)$ ist periodisch mit Periode $l > 0$.
- (II) Es gibt eine reelle Zahl $l > 0$ mit $K(l) = K(0)$.
- (III) Es ist

$$K(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \frac{2\pi}{l} m \tau$$

mit $l > 0$, alle $a_m \geq 0$ und $\sum a_m$ konvergent.

Beweis: Ersichtlich folgt (I) aus (III) und (II) aus (I). Es genügt also zu zeigen, daß (III) aus (II) folgt. Nach dem Satz von KHINTCHINE [10] gibt es eine reellwertige, beschränkte, monoton nichtabnehmende Funktion $F(\lambda)$ mit $K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \tau \lambda dF(\lambda)$. Dann ist

$$K(0) - K(l) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos l \lambda) dF(\lambda) = 0.$$

Daraus folgt, daß $F(\lambda)$ eine Treppenfunktion ist, die höchstens bei $\lambda = \frac{2\pi}{l} m$ mit ganzzahligen m Sprungstellen hat. Also ist

$$K(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a'_m \cos \frac{2\pi}{l} m \tau$$

mit $a'_m \geq 0$. Für $a_m = \frac{1}{2} (a'_{-m} + a'_{+m})$ folgt die Behauptung. ■

Wir wollen uns nun mit dem zweidimensionalen Fall beschäftigen, und zwar insbesondere mit harmonischen Prozessen, die auf dem Rande stationär sind.

Mit $x = (x_1, x_2)$ bezeichnen wir Punkte des zweidimensionalen euklidischen Raumes R_2 . B sei ein offenes, beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet im R_2 und \bar{B} die abgeschlossene Hülle von B . Der stückweise glatte Rand B^* von B sei darstellbar durch zwei stetige Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$$B^* = \{x(t) : x(t) = (x_1(t), x_2(t)), 0 \leq t \leq l\}.$$

Jedem Punkt von B^* entspreche genau ein t mit $0 \leq t < l$ und es sei $x_i(0) = x_i(l)$ für $i = 1, 2$. Für jede im Intervall $[0, l]$ definierte, stetige Funktion $g(t)$ mit $g(0) = g(l)$ sei die erste Randwertaufgabe eindeutig lösbar. $u(x, \omega)$ sei ein in B harmonischer Prozeß, dessen Kovarianzfunktion $R(x, y)$ wir auf dem Rand B^* wieder mit $R^*(t, s) = R(x(t), x(s))$ bezeichnen. Dann sind alle Voraussetzungen der Abschnitte 2.1. und 2.3.1. erfüllt.

Aus Satz 14 folgt unmittelbar

Satz 15: Es sei $u(x, \omega)$ ein in B harmonischer Prozeß, der stationär auf dem Rande B^* ist, d. h. dessen Kovarianzfunktion auf B^* nur von $t - s$ abhängt, sagen wir $R^*(t, s) = R^{**}(t - s)$. Dann ist R^{**} darstellbar in der Form

$$R^{**}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \frac{2\pi}{l} m \tau$$

mit $a_m \geq 0$ und $\sum a_m$ konvergent.

Beachtet man, daß

$$\cos \frac{2\pi}{l} m(t - s) = \cos \frac{2\pi}{l} m t \cos \frac{2\pi}{l} m s + \sin \frac{2\pi}{l} m t \sin \frac{2\pi}{l} m s$$

ist, so erkennt man die enge Beziehung zur Spektraldarstellung des Satzes 10, die sich mit den obigen Bezeichnungen genauer so ausdrücken läßt:

Satz 16: Es sei $R(x, y)$ die Kovarianzfunktion eines in B harmonischen Prozesses. Für die Kovarianzfunktion $R^*(t, s)$ auf dem Rande B^* sind folgende Aussagen äquivalent:

- (I) $R^*(t, s)$ hängt nur von $t - s$ ab.
- (II) $R^*(t, s)$ hat aufgefaßt als Kern der Integralgleichung

$$\int_0^l R^*(t, s) \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t)$$

die orthonormierten Funktionen $\sqrt{\frac{1}{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi}{l} m t, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} m t$ ($m = 1, 2, \dots$) als Eigenfunktionen, und weitere dazu orthogonale Eigenfunktionen gibt es nicht. Die zu $\sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi}{l} m t$ und $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} m t$ gehörigen Eigenwerte stimmen überein.

Beweis: „(I) \Rightarrow (II)“: Wir setzen $R^{**}(t - s) = R^*(t, s)$ und denken uns R^{**} periodisch fortgesetzt. Daß die angegebenen Funktionen wirklich Eigenfunktionen sind, rechnet man unter Berücksichtigung der Periodizität aller auftretenden Funktionen sofort nach. Wegen der Vollständigkeit des in (II) angegebenen Funktionensystems kann es keine weiteren dazu orthogonalen Eigenfunktionen geben.

„(II) \Rightarrow (I)“: Zu $\sqrt{\frac{1}{l}}$ gehöre der Eigenwert λ_0 und zu $\sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi}{l} m t$ und $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} m t$ gehöre der Eigenwert λ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$). Dann ist nach Satz 10 beziehungsweise Formel (4)

$$\begin{aligned} R^*(t, s) &= \lambda_0 \frac{1}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \frac{2}{l} \left(\cos \frac{2\pi}{l} m t \cos \frac{2\pi}{l} m s + \sin \frac{2\pi}{l} m t \sin \frac{2\pi}{l} m s \right) \\ &= \lambda_0 \frac{1}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \frac{2}{l} \cos \frac{2\pi}{l} m(t - s), \end{aligned}$$

d. h. $R^*(t, s)$ hängt nur von $t - s$ ab. ■

Da nach Abschnitt 2.3.1. alle Eigenwerte ≥ 0 sind, folgt aus Satz 16 sofort wieder Satz 15.

Daß es zu beliebig vorgegebenen reellen Zahlen $a_m \geq 0$, für die $\sum a_m$ konvergent ist, stets einen in B harmonischen Prozeß gibt, dessen Kovarianzfunktion auf dem Rande B^* gleich $R^*(t, s) = \sum a_m \cos \frac{2\pi}{l} m(t - s)$ ist, folgt unmittelbar aus Satz 11. Man wählt dazu als Funktionen $\varphi_i(x)$ die harmonischen Funktionen mit Randwerten $\sqrt{\frac{1}{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi}{l} m t$ beziehungsweise $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} m t$ und als Eigenwerte $l a_0$ bzw. $\frac{l}{2} a_m$.

2.3.5. Harmonische Prozesse im Kreis

Wir wollen hier den gegenüber dem vorigen Abschnitt noch engeren Spezialfall betrachten, daß das Gebiet B der Einheitskreis $x_1^2 + x_2^2 < 1$ ist. Als Parameterdarstellung für B^* nehmen wir

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = \sin t \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Satz 17: Es sei $u(x, \omega)$ ein im Einheitskreis B harmonischer Prozeß, der stationär auf dem Rande B^* ist und bei dem $u(x(t), \omega)$ bezüglich t und ω quadratisch integrierbar ist. Dann ist die Kovarianzfunktion darstellbar durch eine gleichmäßig konvergente Reihe:

$$R(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r_x^m r_y^m \cos(t_x - t_y) m \dots \dots \dots (11),$$

wobei $x = (r_x \cos t_x, r_x \sin t_x)$ und $y = (r_y \cos t_y, r_y \sin t_y)$ gesetzt ist und alle $a_m \geq 0$ sind.

Es sei

$$\alpha_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x(t), \omega) \cos i t dt \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

und

$$\beta_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x(t), \omega) \sin i t dt \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Dann sind die $\alpha_0(\omega)$, $\alpha_1(\omega)$, $\beta_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$, \dots unkorrelierte zufällige Variable mit Mittelwert 0 und Streuung

$$E[\alpha_0(\omega)^2] = 4 a_0 \quad \text{und} \quad E[\alpha_m(\omega)^2] = E[\beta_m(\omega)^2] = a_m \quad (m = 1, 2, \dots) \dots (12),$$

und es ist für $x = (r \cos t, r \sin t)$

$$u(x, \omega) = \frac{1}{2} \alpha_0(\omega) + \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m(\omega) r^m \cos m t + \beta_m(\omega) r^m \sin m t] \dots \dots \dots (13),$$

und zwar gilt in (13) das Gleichheitszeichen bis auf eine von x unabhängige μ -Nullmenge aus Ω , wenn nur endlich viele $a_m > 0$ sind, während sonst die Konvergenz der Reihe gegen $u(x, \omega)$ im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Quadratmittel zu verstehen ist.

Anmerkung: Für $r < 1$ folgt die Konvergenz von (13) für jedes ω aus bekannten Sätzen über die Darstellung von harmonischen Funktionen durch FOURIERREIHEN.

Beweis: Satz 16 können wir die Eigenfunktionen von $R^*(t, s)$ entnehmen, die durch Multiplikation mit r^m zu in B harmonischen Funktionen werden, und zwar zu den Funktionen $\varphi_i(x)$ aus Satz 10. Damit ergibt sich unmittelbar die Darstellung (11). Die Darstellung (13) folgt sofort aus Satz 12 beziehungsweise 13. ■

Die Darstellung (11) der Kovarianzfunktion liefert zugleich einen Satz von KAMPÉ DE FÉRIET (siehe in [7] Satz 3), der mit unseren Bezeichnungen, aber etwas anderen Voraussetzungen besagt, daß die Kovarianzfunktion eines auf dem Rande des Einheitskreises stationären harmonischen Prozesses nur von $r_x r_y$ und $t_x - t_y$ abhängt.

Die Darstellung (13) läßt sich etwa so deuten: Aus der Stationarität von $u(x, \omega)$ auf dem Rande folgt die Unkorreliertheit der FOURIERKoeffizienten, für die überdies (12) gilt.

Eine gewisse Umkehrung hiervon wollen wir jetzt beweisen. Es handelt sich bei diesen Sätzen übrigens um ähnliche Aussagen wie beim Satz von E. E. SLUTSKI (siehe [2] S. 291 und auch [16]).

Es sei $u(x, \omega)$ ein in B harmonischer Prozeß. Als harmonische Funktion von x läßt sich $u(x, \omega)$ in eine FOURIERREIHE entwickeln:

$$u(x, \omega) = \frac{1}{2} \alpha_0(\omega) + \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m(\omega) r^m \cos m t + \beta_m(\omega) r^m \sin m t] \dots \dots \dots (14).$$

Da die Reihe (14) für $r = 1$ eventuell nur als ABELSche Summe existiert, setzen wir voraus, daß sie auch für $r = 1$ für jedes $\omega \in \Omega$ und jedes t konvergiert. Weiter setzen wir voraus, daß die $\alpha_i(\omega)$ und $\beta_i(\omega)$ unkorrelierte zufällige Variable sind mit Mittelwert 0 und

$$E[\alpha_m(\omega)^2] = E[\beta_m(\omega)^2] \dots \dots \dots (15)$$

für $m = 1, 2, 3, \dots$. Überdies sei die Reihe für $u(x, \omega)$ $u(y, \omega)$ für $r_x = r_y = 1$ so beschaffen, daß man gliedweise bezüglich ω integrieren darf, was etwa der Fall ist, wenn eine quadratisch

μ -integrierbare Majorante existiert oder die Reihe (14) für $r = 1$ bezüglich ω gleichmäßig konvergent ist. Dann folgt ersichtlich, daß

$$E[u(x(t), \omega) u(x(s), \omega)] = \frac{1}{4} E[\alpha_0(\omega)^2] + \sum_{m=1}^{\infty} E[\alpha_m(\omega)^2] \cos(t-s) m$$

ist, d. h.: Unter gewissen Voraussetzungen folgt aus der Unkorreliertheit der FOURIERkoeffizienten zusammen mit (15) die Stationarität von $u(x, \omega)$ auf dem Rande.

Zum Abschluß wollen wir zeigen, wie man durch „zufälliges Drehen“ einer im Einheitskreis harmonischen Funktion $f(x)$ ein Beispiel für einen harmonischen Prozeß erhalten kann, der stationär auf dem Rande ist. Es sei

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m r^m \cos m t + \beta_m r^m \sin m t]$$

und dabei sei $x = (r \cos t, r \sin t)$ mit $0 \leq r \leq 1$ und es seien $\sum \alpha_m$ und $\sum \beta_m$ absolut konvergent und es sei mindestens ein $\alpha_m \neq 0$ oder ein $\beta_m \neq 0$. Ein konstantes Glied darf nicht auftreten, weil sonst der Mittelwert des Prozesses $\neq 0$ wäre. Für den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, μ) nehmen wir

$$\Omega = \{\omega : 0 \leq \omega \leq 2\pi\}, \quad S = \sigma\text{-Algebra der BOREL-Mengen in } \Omega \text{ und } \mu = \frac{1}{2\pi} \cdot \text{LEBESGUE-Maß.}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} u(x, \omega) &= \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m r^m \cos(t + \omega) m + \beta_m r^m \sin(t + \omega) m] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} r^m [(\alpha_m \cos \omega m + \beta_m \sin \omega m) \cos t m + (\beta_m \cos \omega m - \alpha_m \sin \omega m) \sin t m]. \end{aligned}$$

Ersichtlich ist $u(x, \omega)$ ein harmonischer Prozeß und durch elementare Rechnung erhält man als Kovarianzfunktion

$$E[u(x, \omega) u(y, \omega)] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} (\alpha_m^2 + \beta_m^2) r_x^m r_y^m \cos(t_x - t_y) m.$$

3. Isotrope Prozesse

3.1. Isotrope Prozesse im n -dimensionalen Raum

3.1.1. Definition und einfache Eigenschaften

Wieder seien $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n), \dots$ Punkte des n -dimensionalen euklidischen Raumes R_n ($n \geq 1$) und (Ω, S, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei $v(x, \omega)$ ein im R_n definierter, reellwertiger, stochastischer Prozeß, wobei bemerkt sei, daß man statt des ganzen R_n nur einen geeigneten Teilbereich brauchte.

Man definiert dann (siehe etwa JAGLOM [5], [6] oder OBUCHOW [11]):

Definition 2: Ein im n -dimensionalen Raum R_n definierter stochastischer Prozeß $v(x, \omega)$, für den $E[v(x, \omega)^2] = \int_{\Omega} v(x, \omega)^2 d\mu$ für jedes $x \in R_n$ existiert, heißt isotrop, wenn

$$I.) \quad E[v(x, \omega)] = \int_{\Omega} v(x, \omega) d\mu = 0$$

ist für alle $x \in R_n$ und

$$II.) \quad E[v(x, \omega) v(y, \omega)] = \int_{\Omega} v(x, \omega) v(y, \omega) d\mu$$

nur eine und zwar stetige Funktion von $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ ist, die als Korrelationsfunktion $K(r)$ bezeichnet wird.

Die erste Bedingung stellt keine nennenswerte Einschränkung der Allgemeinheit dar, denn sie läßt sich durch Abziehen des Mittelwertes bei jedem stochastischen Prozeß erfüllen.

Da bei einem isotropen Prozeß die Streuungsfunktion $E[v(x, \omega)^2]$ offenbar konstant ist, nämlich $= K(0)$, entspricht $K(r)$ bis auf einen von x und y unabhängigen Faktor dem Korrelationskoeffizienten der Statistik. Daher ist es üblich, $K(r)$ als Korrelationsfunktion und nicht etwa als Kovarianzfunktion zu bezeichnen.

Im eindimensionalen Fall heißt ein isotroper Prozeß auch stationär oder genauer stationär im weiteren Sinne.

Für die Korrelationsfunktion gilt die SCHWARZSCHE Ungleichung:

$$K(r)^2 = \left[\int_{\Omega} v(x, \omega) v(y, \omega) d\mu \right]^2 \leq \int_{\Omega} v(x, \omega)^2 d\mu \int_{\Omega} v(y, \omega)^2 d\mu = K(0)^2 \quad \dots \quad (16),$$

wobei $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ ist, d. h. es ist für $r \geq 0$

$$|K(r)| \leq K(0) \quad \dots \quad (17).$$

In (16) gilt bekanntlich das Gleichheitszeichen für festes x und y dann und nur dann, wenn es zwei reelle Zahlen α und β gibt mit $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ und $\alpha v(x, \omega) + \beta v(y, \omega) = 0$ für μ -fast alle ω .

Um zu untersuchen, wann $|K(r)| = K(0)$ ist, beweisen wir zunächst einen

Hilfssatz: Bei einem isotropen Prozeß $v(x, \omega)$ ist für zwei feste Punkte x und $y \in R_n$ dann und nur dann $E[v(x, \omega) v(y, \omega)] = K(0)$, wenn $v(x, \omega) = v(y, \omega)$ ist für μ -fast alle ω .

Dagegen ist $E[v(x, \omega) v(y, \omega)] = -K(0)$ gleichbedeutend damit, daß $v(x, \omega) = -v(y, \omega)$ für μ -fast alle ω ist.

Beweis: 1. Es ist trivial, daß die Bedingung hinreichend ist. Es sei nun $E[v(x, \omega) v(y, \omega)] = K(0)$. Dann gibt es α und β mit $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ und $\alpha v(x, \omega) + \beta v(y, \omega) = 0$ für μ -fast alle ω . Folglich ist $0 = \int_{\Omega} [\alpha v(x, \omega) + \beta v(y, \omega)]^2 d\mu = (\alpha + \beta)^2 K(0)$. Wenn $K(0) = 0$ ist, so folgt

die Behauptung, weil dann für jedes feste x $v(x, \omega) = 0$ ist für μ -fast alle ω . Ist dagegen $K(0) \neq 0$, so muß $\alpha = -\beta$ sein, woraus ebenfalls $v(x, \omega) = v(y, \omega)$ für μ -fast alle ω folgt.

2. Die Behauptung über $-K(0)$ folgt ganz entsprechend. ■

Satz 18: Es sei $K(r)$ die Korrelationsfunktion eines isotropen Prozesses $v(x, \omega)$ im R_n und es sei $n \geq 2$. Wenn es ein $r_0 > 0$ gibt mit $K(r_0) = K(0)$, so ist $K(r) = K(0)$ für alle $r \geq 0$.

Beweis: Es genügt offenbar zu zeigen, daß $K(r_1) = K(0)$ ist für ein beliebiges r_1 mit $0 < r_1 \leq 2r_0$.

Es seien x und y zwei beliebige Punkte des R_n mit $\sum (x_i - y_i)^2 = r_1^2$. Dann gibt es einen Punkt $z = (z_1, \dots, z_n)$ mit $\sum (x_i - z_i)^2 = \sum (y_i - z_i)^2 = r_0^2$. Es ist $E[v(x, \omega) v(z, \omega)] = K(r_0) = K(0)$ und $E[v(y, \omega) v(z, \omega)] = K(r_0) = K(0)$. Nach dem obigen Hilfssatz folgt daraus, daß $v(x, \omega) = v(z, \omega)$ μ -fast überall und daß $v(y, \omega) = v(z, \omega)$ μ -fast überall ist. Also ist auch $v(x, \omega) = v(y, \omega)$ μ -fast überall und daraus folgt wieder nach dem Hilfssatz $K(r_1) = K(0)$. ■

Satz 19: Es sei $K(r)$ die Korrelationsfunktion eines isotropen Prozesses $v(x, \omega)$ im R_n , $n \geq 2$ und $K(0) > 0$. Dann ist $K(r) > -K(0)$ für jedes $r \geq 0$.

Beweis indirekt: Wegen (17) ist stets $K(r) \geq -K(0)$.

Annahme: Es gibt ein r_0 mit $K(r_0) = -K(0)$. Dann ist $r_0 > 0$. Wir wählen drei Punkte x, y und z im R_n , die alle den Abstand r_0 voneinander haben. Dann ist $E[v(x, \omega) v(y, \omega)] = E[v(y, \omega) v(z, \omega)] = E[v(z, \omega) v(x, \omega)] = -K(0)$. Nach dem obigen Hilfssatz folgt $v(x, \omega) = -v(y, \omega)$, $v(y, \omega) = -v(z, \omega)$, $v(z, \omega) = -v(x, \omega)$ μ -fast überall. Da $K(0) > 0$ ist, verschwindet keine der Größen μ -fast überall und daher ist die Annahme zum Widerspruch geführt. ■

Der Satz von KHINTCHINE [10] zeigt, daß die beiden obigen Sätze für $n = 1$ nicht gelten.

Wir wollen daraus noch eine Folgerung ableiten. Hält man bei einem isotropen Prozeß $v(x, \omega)$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $n > 1$ einige der x_i fest, so bekommt man offenbar einen isotropen Prozeß in einem Raum entsprechend niedrigerer Dimension. Umgekehrt läßt sich aber nicht jeder isotrope Prozeß in einen isotropen Prozeß höherer Dimension einbetten.

3.1.2. Spektraldarstellung der Korrelationsfunktion

Die Frage, welche Funktionen als Korrelationsfunktionen isotroper Prozesse auftreten können, wurde bei im Eindimensionalen definierten, isotropen (also stationären) Prozessen von KHINTCHINE [10] vollständig beantwortet.

Mit Hilfe eines Satzes von SCHOENBERG [15] kann man ein entsprechendes Resultat im n -dimensionalen Fall für $n \geq 2$ beweisen (siehe z. B. JAGLOM [6], aber auch S. ITÔ [4], K. ITÔ [3], ROBERTSON [14]):

Satz 20: Die Korrelationsfunktion $K(r)$ jedes isotropen Prozesses $v(x, \omega)$ im R_n mit $n \geq 2$ läßt sich darstellen in der Form

$$K(r) = \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} dG(\lambda) \quad \dots \quad (18),$$

wobei $J_{\frac{n-2}{2}}$ die Besselsche Funktion der Ordnung $\frac{n-2}{2}$ und $G(\lambda)$ eine reellwertige, monoton nicht-abnehmende, beschränkte Funktion ist.

Die Darstellung (18) ermöglicht es übrigens, den Satz 18 des vorigen Abschnittes in einfacher Weise zu beweisen.

Umgekehrt läßt sich zeigen:

Satz 21: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und jede reellwertige, monoton nicht-abnehmende, beschränkte Funktion $G(\lambda)$ gibt es mindestens einen isotropen Prozeß $v(x, \omega)$ im R_n , dessen Korrelationsfunktion die Gestalt (18) hat.

Um zu zeigen, daß man $v(x, \omega)$ so wählen kann, daß $v(x, \omega)$ bei festem ω nach jedem x_i beliebig oft partiell differenzierbar ist, geben wir einen passenden Prozeß explizit an.

Es sei $\int_0^\infty dG(\lambda) = \gamma$. Sicher ist $\gamma \geq 0$. Ist $\gamma = 0$, so genügt es offenbar $v(x, \omega) \equiv 0$ zu wählen. Es sei nun $\gamma > 0$. Wir bezeichnen mit O_n den Flächeninhalt der Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel. Es seien $h_1(\omega_1)$ und $h_2(\omega_1)$ zwei beschränkte, unkorrelierte zufällige Variable über einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω_1, S_1, μ_1) mit Mittelwert 0 und Streuung 1. Wir setzen

$$\Omega_2 = \{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in R_n : \beta_1^2 + \dots + \beta_n^2 = 1\}$$

$$S_2 = \sigma\text{-Algebra der BOREL-Teilmengen von } \Omega_2$$

$$\mu_2 = \frac{1}{O_n} \cdot \text{LEBESGUE-Maß}$$

und

$$\Omega_3 = \text{Menge der reellen Zahlen } \geq 0$$

$$S_3 = \sigma\text{-Algebra der BOREL-Teilmengen von } \Omega_3$$

$$\mu_3 = \text{nicht-negatives, totaladditives Maß auf } S_3, \text{ das von } \frac{1}{\gamma} G(\lambda) \text{ erzeugt wird.}$$

Dann ist $(\Omega, S, \mu) = (\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3, S_1 \times S_2 \times S_3, \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für jedes reelle n -Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$ und jedes $\omega = (\omega_1, \omega_2, \lambda) \in \Omega$ (mit $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Omega_2$, $\lambda \in \Omega_3$) definieren wir einen stochastischen Prozeß $v(x, \omega)$ durch

$$v(x, \omega) = \alpha_n h_1(\omega_1) \cos \left(\lambda \sum_{i=1}^n x_i \beta_i \right) + \alpha_n h_2(\omega_1) \sin \left(\lambda \sum_{i=1}^n x_i \beta_i \right) \dots \dots \dots (19)$$

$$\text{wobei } \alpha_n = \sqrt{\frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n-2}{2}}}} \text{ ist.}$$

Man prüft durch eine elementare, aber etwas umfangreichere Rechnung nach, daß dieses $v(x, \omega)$ alle verlangten Eigenschaften hat.

Ein interessantes Beispiel für eine Korrelationsfunktion erhält man durch die Wahl:

$$G(\lambda) = \frac{\sigma^n}{2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\lambda \tau^{n-1} e^{-\frac{\sigma^2 \tau^2}{4}} d\tau,$$

wobei σ eine beliebige reelle Zahl > 0 ist. Dann ergibt sich nach (18):

$$K(r) = \frac{\sigma^n}{2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} \lambda^{n-1} e^{-\frac{\sigma^2 \lambda^2}{4}} d\lambda = e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}.$$

Auch für die Dimension $n = 1$ läßt sich $e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}$ als Korrelationsfunktion realisieren. Damit haben wir bewiesen:

Satz 22: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und jede reelle Zahl $\sigma > 0$ gibt es mindestens einen isotropen Prozeß im R_n mit Korrelationsfunktion

$$K(r) = e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} \dots \dots \dots (20).$$

Man überlegt sich nun leicht, daß es auch zu jeder reellwertigen, monoton nicht-abnehmenden, beschränkten Funktion $G(\lambda)$ einen isotropen Prozeß im R_n mit

$$K(r) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 r^2} dG(\lambda) \dots \dots \dots (21)$$

als Korrelationsfunktion gibt.

3.1.3. Die Korrelationsfunktion von $\Delta u(x, \omega)$

Es sei $v(x, \omega)$ ein isotroper Prozeß im R_n mit Korrelationsfunktion (18). Für jedes $\omega \in \Omega$ existiere $\Delta_x v(x, \omega)$ ($\Delta_x = \text{LAPLACE-Operator bezogen auf } x$) und sei für jedes feste $x \in R_n$ eine S -meßbare Abbildung von Ω in R_1 . Die folgenden Größen mögen existieren und die angegebenen Vertauschungsmöglichkeiten bestehen:

$$E[\Delta_x v(x, \omega)] = \Delta_x E[v(x, \omega)] ,$$

$$E[\Delta_x v(x, \omega) \Delta_y v(y, \omega)] = \Delta_x \Delta_y E[v(x, \omega) v(y, \omega)] = \Delta_x \Delta_y K(r) = \int_0^\infty \left(\Delta_x \Delta_y \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} \right) dG(\lambda) .$$

Dann ist $\Delta_x v(x, \omega)$ ein stochastischer Prozeß mit Mittelwert

$$E[\Delta_x v(x, \omega)] = 0$$

für alle $x \in R_n$. Wir wollen seine Korrelationsfunktion berechnen. Wie man unter Benutzung der Reihenentwicklung von $J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)$ sofort nachrechnet, ist

$$\Delta_x \Delta_y \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} = + \lambda^4 \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} .$$

Also ist $\Delta_x v(x, \omega)$ wieder ein isotroper Prozeß und zwar mit der Korrelationsfunktion

$$E[\Delta_x v(x, \omega) \Delta_y v(y, \omega)] = \int_0^\infty \lambda^4 \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} dG(\lambda) \quad (22).$$

Wir wollen noch eine Folgerung herleiten für den Spezialfall, daß $v(x, \omega)$ außerdem die Eigenschaft hat, daß $\Delta_x v(x, \omega) \equiv 0$ ist. Dann ist auch $E[\Delta_x v(x, \omega) \Delta_y v(y, \omega)] \equiv 0$. Aus (22) folgt damit für $r = 0$, daß $G(\lambda)$ eine Treppenfunktion ist, die höchstens bei $\lambda = 0$ eine Sprungstelle hat. Aus (18) ergibt sich damit, daß $K(r) = K(0)$ ist für alle $r \geq 0$, und also ist $E[(v(x, \omega) - v(y, \omega))^2] = 0$ für alle x und y (siehe auch Satz 1 in Abschnitt 2.2.2.).

3.2. Anwendung auf die Fehlerschätzung bei Differenzenverfahren

Für ein Gebiet der Ebene sei die erste Randwertaufgabe (= DIRICHLET-Problem) für die Differentialgleichung

$$\Delta u(x_1, x_2) = r(x_1, x_2) \quad (23)$$

vorgelegt, und es sei mit Hilfe des gewöhnlichen Differenzenverfahrens eine Näherungslösung für gewisse Punkte (Gitterpunkte) des Gebietes berechnet. Wir interessieren uns dafür, wie groß „im Durchschnitt“ der auftretende Verfahrensfehler beziehungsweise dessen Quadrat ist, wenn man diese Berechnung für ein und dasselbe Gebiet bei verschiedenen Randwerten und verschiedenen rechten Seiten $r(x_1, x_2)$ sehr oft durchführt.

Wir wollen zur Lösung dieses Problems so vorgehen: Man deutet die Realisationen eines stochastischen Prozesses als Lösungen der Randwertaufgabe. Für jede Realisation lassen sich auf Grund ihrer Randwerte und ihrer rechten Seiten von (23) mit Hilfe des Differenzenverfahrens Näherungswerte in den Gitterpunkten berechnen. Die dabei auftretenden Fehler sind dann ihrerseits zufällige Größen, deren Erwartungswerte und Streuungen sich berechnen lassen, wenn man geeignete Voraussetzungen über den stochastischen Prozeß macht, etwa daß er isotrop ist. Diese Voraussetzung dürfte auch vom Standpunkt der praktischen Anwendung aus vertretbar sein, da sie ja nur besagt, daß die „Stärke des Zusammenhangs“ zwischen den Funktionswerten in zwei verschiedenen Punkten zwar vom Abstand dieser Punkte aber nicht von ihrer Lage abhängt.

3.2.1. Bezeichnungen und Problemstellung

Es sei B ein offenes, beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet im R_2 , \bar{B} die abgeschlossene Hülle von B und B^* der Rand von B . Als Gitterpunkte bezeichnen wir alle Punkte $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, deren Koordinaten die Form $x_1^{(i)} = x_1^{(0)} + \alpha h$, $x_2^{(i)} = x_2^{(0)} + \beta h$ haben, wobei $h > 0$, $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ beliebige, aber im folgenden festgehaltene reelle Zahlen sind und α und β alle ganzen Zahlen durchlaufen. h heißt die Maschenweite des Gitters. Jeder Gitterpunkt, der zu B gehört, heißt innerer Gitterpunkt; ihre Anzahl sei N und wir bezeichnen sie mit $(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Wir setzen voraus, daß alle Parallelen zu den Koordinatenachsen durch innere Gitterpunkte den Rand B^* ausschließlich in Gitterpunkten schneiden, die wir Rand-Gitterpunkte nennen wollen. Diese Voraussetzung besagt in der bei Differenzenverfahren üblichen Sprechweise, daß das Gebiet B so beschaffen ist, daß es nur reguläre Gitterpunkte enthält.

Es sei $u(x_1, x_2, \omega)$ ein für alle $(x_1, x_2) \in \bar{B}$ definierter stochastischer Prozeß über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, μ) . Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $u(x_1, x_2, \omega)$ als Funktion von x_1 und x_2 in \bar{B} stetig und in B zweimal stetig partiell differenzierbar. Für jedes $(x_1, x_2) \in \bar{B}$ existiere $E[u(x_1, x_2, \omega)^2]$, und es sei

$$E[u(x_1, x_2, \omega)] = \sum_{i,k=0}^3 c_{ik} x_1^i x_2^k \quad (24).$$

Wir verlangen nicht, daß dieser Erwartungswert gleich Null ist, um zu etwas allgemeineren Aussagen zu kommen. Es sei bemerkt, daß man die reellen Zahlen c_{ik} für die folgende Fehlerschätzung nicht zu kennen braucht.

Wir setzen

$$v(x_1, x_2, \omega) = u(x_1, x_2, \omega) - \sum_{i,k=0}^3 c_{ik} x_1^i x_2^k \quad (25).$$

Dann ist auch $v(x_1, x_2, \omega)$ ein stochastischer Prozeß, dessen Mittelwert $\equiv 0$ ist und dessen Streuung existiert.

Es seien $E[u(x_1, x_2, \omega)]$ und $E[u(x_1, x_2, \omega) u(y_1, y_2, \omega)]$ stetig in \bar{B} und zweimal stetig partiell nach allen Variablen differenzierbar in B . Die folgenden Vertauschungsregeln seien erfüllt ($\Delta_x =$ LAPLACE-Operator bezogen auf (x_1, x_2)):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x E[u(x_1, x_2, \omega)] &= E[\Delta_x u(x_1, x_2, \omega)], \\ \Delta_x E[u(x_1, x_2, \omega) u(y_1, y_2, \omega)] &= E[\Delta_x u(x_1, x_2, \omega) u(y_1, y_2, \omega)], \\ \Delta_x \Delta_y E[u(x_1, x_2, \omega) u(y_1, y_2, \omega)] &= E[\Delta_x u(x_1, x_2, \omega) \Delta_y u(y_1, y_2, \omega)] \end{aligned} \right\} (26).$$

Dann gelten die Vertauschungsregeln offenbar auch für $v(x_1, x_2, \omega)$. Wir setzen nun voraus, daß $E[v(x_1, x_2, \omega) v(y_1, y_2, \omega)]$ nur von $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ abhängt, sagen wir

$$E[v(x_1, x_2, \omega) v(y_1, y_2, \omega)] = K(\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}) \quad (27).$$

Dann ist $v(x_1, x_2, \omega)$ ein isotroper Prozeß. Wir definieren $K(t)$ für $t < 0$ durch $K(-t) = K(t)$ und setzen weiter voraus, daß $K(t)$ für alle t mit

$$|t| \leq \max_{\substack{(x_1, x_2) \in \bar{B} \\ (y_1, y_2) \in \bar{B}}} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

zehnmal stetig differenzierbar ist und sich also darstellen läßt in der Form

$$K(t) = b_0 + b_2 t^2 + b_4 t^4 + b_6 t^6 + b_8 t^8 + O(t^{10}) \quad (28),$$

wobei O das LANDAU-Symbol ist.

Betrachtet man $v(x_1, x_2, \omega)$ bei festgehaltenem x_2 (oder x_1), so haben wir einen stationären Prozeß vor uns. Im Aufsatz [17] ist die Bedeutung der Koeffizienten b_i angegeben, und zwar ist die Streuung der μ -ten Differenz gleich $(-1)^\mu (2\mu)! b_{2\mu} h^{2\mu} + O(h^{2\mu+2})$. Für die folgende Fehlerschätzung interessiert uns nur b_8 . Da bei der Bildung der vierten Differenzen Polynome vom Grad ≤ 3 verschwinden, können wir $v(x_1, x_2, \omega)$ durch $u(x_1, x_2, \omega)$ ersetzen und erhalten

$$\left. \begin{aligned} E[\{u(x_1 + 4h, x_2, \omega) - 4u(x_1 + 3h, x_2, \omega) + 6u(x_1 + 2h, x_2, \omega) \\ - 4u(x_1 + h, x_2, \omega) + u(x_1, x_2, \omega)\}^2] &= 8! b_8 h^8 + O(h^{10}), \\ E[\{u(x_1, x_2 + 4h, \omega) - 4u(x_1, x_2 + 3h, \omega) + 6u(x_1, x_2 + 2h, \omega) \\ - 4u(x_1, x_2 + h, \omega) + u(x_1, x_2, \omega)\}^2] &= 8! b_8 h^8 + O(h^{10}) \end{aligned} \right\} (29).$$

Diese Gleichungen ermöglichen es bei der Anwendung der Fehlerschätzung b_8 wenigstens näherungsweise zu schätzen, indem man die entsprechenden vierten Differenzen auf dem Rande B^* bildet.

Für die Fehlerschätzung deutet man $u(x_1, x_2, \omega)$ für ein festes $\omega \in \Omega$ als „exakte Lösung“ der Randwertaufgabe (23). Wir führen für jedes ω und jeden inneren Gitterpunkt $(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)})$ ($i = 1, 2, \dots, N$) einen „Näherungswert“ $U(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$D U(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) = r(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

ein, wobei $r(x_1, x_2, \omega) = \Delta u(x_1, x_2, \omega)$ ist und der Operator D definiert ist durch

$$D f(x_1, x_2) = \frac{1}{h^2} \{f(x_1 + h, x_2) + f(x_1 - h, x_2) + f(x_1, x_2 + h) + f(x_1, x_2 - h) - 4 f(x_1, x_2)\} \quad (31);$$

alle Stellen, an denen U in (30) auftritt, sind offenbar Gitterpunkte in \bar{B} , und soweit sie Rand-Gitterpunkte sind, setzen wir $U(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \omega) = u(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \omega)$. Das lineare Gleichungssystem (30) sei eindeutig lösbar. Dann sind $U(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)$ genau die Werte der Näherungslösung, die man erhält, wenn man die Randwertaufgabe $\Delta u(x_1, x_2, \omega) = r(x_1, x_2, \omega)$ in B mit $u(x_1, x_2, \omega)$ auf B^* als Randwerten durch das gewöhnliche Differenzenverfahren löst.

Als „Fehler“ definieren wir für alle Gitterpunkte in \bar{B}

$$e(x_1, x_2, \omega) = U(x_1, x_2, \omega) - u(x_1, x_2, \omega) \quad (32).$$

U und damit auch e sind als Funktionen von ω als Linearkombinationen von zufälligen Variablen selber zufällige Variable, deren Streuung existiert.

Nach Definition von U ist $e(x_1^{*(k)}, x_2^{*(k)}, \omega) = 0$ für alle Rand-Gitterpunkte $(x_1^{*(k)}, x_2^{*(k)})$ und alle $\omega \in \Omega$. Weiter ist für alle inneren Gitterpunkte $(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)})$:

$$\begin{aligned} D e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) &= D U(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) - D u(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) \\ &= r(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) - D u(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) = (\Delta - D) u(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) \quad (33). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (26) und (24) und der Tatsache, daß ein Polynom 3. Grades bei der Anwendung von $(\Delta - D)$ Null ergibt, folgt daraus

$$D E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)] = 0.$$

Da das Gleichungssystem (30) als eindeutig auflösbar vorausgesetzt ist, ergibt sich, daß

$$\underline{E[e(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \omega)] = 0} \quad (34)$$

ist für alle Gitterpunkte $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ aus \bar{B} .

Unsere Aufgabe ist es jetzt, die Streuung $E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2]$ zu berechnen. Dazu wollen wir zunächst eine gewisse TAYLOR-Entwicklung durchführen.

3.2.2. Eine Taylor-Entwicklung

Es seien (x_1, x_2) und (y_1, y_2) zwei Punkte aus \bar{B} und es sei $x_1 - y_1 = a h$ und $x_2 - y_2 = b h$, wobei a und b beliebig reell sind. Mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnittes ((28), (31)) wollen wir zeigen, daß

$$h^4 (\Delta - D)_x (\Delta - D)_y K(\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}) = 608 b^8 h^8 + O(h^{10}) \quad (35)$$

ist. Man beachte, daß der Koeffizient von h^8 unabhängig von x_1, x_2, y_1, y_2, a und b ist. Das ist die entscheidende Tatsache, die eine bequeme Fehlerschätzung ermöglichen wird.

Beweis für (35): Wir setzen

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0 \quad \text{und} \quad f(r) = f(\sqrt{r^2}) = K(\sqrt{r^2}) - \sum_{i=0}^4 b_{2i} r^{2i}.$$

Dann ist $f(r)$ zehnmal stetig differenzierbar und an der Stelle $r = 0$ verschwinden alle Ableitungen von $f(r)$ nach r bis zur Ordnung 9 einschließlich. Es ist $f(r) = O(r^{10})$. Wir bezeichnen die Ableitung von f nach r^2 mit f' und erhalten

$$\Delta_x f(\sqrt{r^2}) = 4 f'(\sqrt{r^2}) + 4 r^2 f''(\sqrt{r^2}) = O(r^8),$$

$$\Delta_y f(\sqrt{r^2}) = 4 f'(\sqrt{r^2}) + 4 r^2 f''(\sqrt{r^2}) = O(r^8),$$

$$\Delta_x \Delta_y f(\sqrt{r^2}) = 32 f''(\sqrt{r^2}) + 64 r^2 f'''(\sqrt{r^2}) + 16 r^4 f''''(\sqrt{r^2}) = O(r^6).$$

$h^2 D_x$ und $h^2 D_y$ bewirken nach (31) nur die Bildung einer Linearkombination. Nutzt man anschließend aus, daß $x_1 - y_1 = a h$ und $x_2 - y_2 = b h$ ist, so folgt, daß $h^4 \Delta_x \Delta_y f$, $h^4 D_x \Delta_y f$, $h^4 \Delta_x D_y f$, $h^4 D_x D_y f$ sämtlich $O(h^{10})$ sind. Also ist $h^4 (\Delta - D)_x (\Delta - D)_y K(\sqrt{r^2}) = h^4 (\Delta - D)_x (\Delta - D)_y \sum_{i=0}^4 b_{2i} r^{2i} + O(h^{10})$. Durch eine einfache Rechnung sieht man, daß alle Summanden mit $i \leq 3$ verschwinden und daß $h^4 (\Delta - D)_x (\Delta - D)_y r^8 = + 608 h^8$ ist. ■

3.2.3. Fehlerschätzung für das gewöhnliche Differenzenverfahren

Wir wollen jetzt die Streuung $E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2]$ des Fehlers für alle inneren Gitterpunkte berechnen. Wir formen dazu das lineare Gleichungssystem (30) etwas um, und zwar multiplizieren wir jede Gleichung mit h^2 und bringen alle Glieder, die keine Unbekannten enthalten (d. h. die Werte in den Randpunkten) auf die rechten Seiten. Dann sind also die Näherungswerte $U(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)$ für die inneren Gitterpunkte eindeutig bestimmt als Lösung des linearen Gleichungssystems ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} U(\tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k)}, \omega) = h^2 r(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) - \sum_j^{(i)} u(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \omega) \dots \dots \dots (36).$$

Dabei sind nach (30) und (31) die a_{ik} ganze Zahlen und zwar 0, 1 oder -4 und die Summe $\sum_j^{(i)}$ ist über diejenigen der vier Nachbarpunkte $(x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$ von $(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)})$ zu nehmen, die Randgitterpunkte sind.

Entsprechend (33) genügen die Fehler (32) dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} e(\tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k)}, \omega) = \varrho_i(\omega) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \dots \dots \dots (37),$$

wobei $\varrho_i(\omega) = h^2 (\Delta - D) u(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)$ ist. Wir setzen nun $(b_{ik}) = (a_{ik})^{-1}$. Dann ist $e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega) = \sum_{k=1}^N b_{ik} \varrho_k(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) und damit nach (26)

$$\begin{aligned} E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2] &= \sum_{k,j=1}^N b_{ik} b_{ij} E[\varrho_k(\omega) \varrho_j(\omega)] \\ &= \sum_{k,j=1}^N b_{ik} b_{ij} h^4 (\Delta - D)_x (\Delta - D)_y E[u(x_1, x_2, \omega) u(y_1, y_2, \omega)] \Big|_{\substack{(x_1, x_2) = (\tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k)}) \\ (y_1, y_2) = (\tilde{x}_1^{(j)}, \tilde{x}_2^{(j)})}}. \end{aligned}$$

Nun ist $(\Delta - D) \sum_{i,k=0}^3 c_{ik} x_1^i x_2^k \equiv 0$ und also ist nach (25) und (27):

$$E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2] = \sum_{k,j=1}^N b_{ik} b_{ij} h^4 (\Delta - D)_x (\Delta - D)_y K(\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}),$$

wobei die Funktion beim k, j -ten Summanden an der Stelle $(x_1, x_2) = (\tilde{x}_1^{(k)}, \tilde{x}_2^{(k)})$, $(y_1, y_2) = (\tilde{x}_1^{(j)}, \tilde{x}_2^{(j)})$ zu bilden ist. Nach (35) folgt daraus $E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2] = \sum_{k,j=1}^N b_{ik} b_{ij} (608 b_8 h^8 + O(h^{10}))$ und also

$$E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2] = 608 b_8 \left(\sum_{j=1}^N b_{ij} \right)^2 h^8 + \left(\sum_{j=1}^N b_{ij} \right)^2 O(h^{10}) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (38).$$

Man beachte, daß man den Faktor $\left(\sum_{j=1}^N b_{ij} \right)^2$ bei $O(h^{10})$ nicht einfach vernachlässigen kann, weil die Anzahl N der inneren Gitterpunkte von der Maschenweite h abhängt.

Mit Formel (38) haben wir die Streuungen der Fehler $e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)$ berechnet, deren Mittelwert nach (34) gleich 0 ist. Zur numerischen Auswertung von (38) braucht man nur b_8 und $\sum_{j=1}^N b_{ij}$. Der Koeffizient b_8 der TAYLOR-Entwicklung (28) der Korrelationsfunktion kann geschätzt werden mit Hilfe der Gleichungen (29), allerdings müssen dazu mindestens fünf Randgitterpunkte auf einer Geraden liegen. Um $\sum_{j=1}^N b_{ij}$ zu berechnen, ist es nicht erforderlich, die Matrix (a_{ik}) des Gleichungssystems (36) beziehungsweise (37) vollständig zu invertieren; es genügt vielmehr zu beachten, daß

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} \left(\sum_{j=1}^N b_{kj} \right) = 1 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, N \dots \dots \dots (39)$$

ist. Die $\sum_{j=1}^N b_{ij}$ sind also eindeutig bestimmt als Lösung eines linearen Gleichungssystems, und zwar ist die auftretende Matrix (a_{ik}) dieselbe wie beim Gleichungssystem (36) für die Näherungslösung.

Häufig wird ein gewisser mittlerer Wert für $E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2]$ genügen. Man erhält aus (38) unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2] \approx \frac{1}{N} 608 b_8 h^8 \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N b_{ij} \right)^2 \dots \dots \dots (40).$$

Zum Schluß sei noch eine Bemerkung über die Möglichkeit gemacht, die obige Fehlerschätzung auf irreguläre Sterne zu übertragen, wie sie bei krummlinigen Rändern im allgemeinen vorkommen. Wohl ist es grundsätzlich, wenn auch nicht so übersichtlich, möglich, die Gleichungen (38) und (39) zu übertragen. Die Hauptschwierigkeit wäre es aber, sich einen Schätzwert für die Koeffizienten b_i zu verschaffen.

3.2.4. Ein numerisches Beispiel

Das Gebiet B sei das Quadrat $\{(x_1, x_2) : 1 < x_1 < 2, 1 < x_2 < 2\}$. Als Maschenweite wählen wir $h = \frac{1}{4}$ und als innere Gitterpunkte nehmen wir

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right), & P_2 &= \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right), & P_3 &= \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right), \\ P_4 &= \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right), & P_5 &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), & P_6 &= \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right), \\ P_7 &= \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right), & P_8 &= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right), & P_9 &= \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right). \end{aligned}$$

Die Randwertaufgabe laute: $\Delta u(x_1, x_2) = 0$ in B und $u(x_1, x_2) = \log(x_1^2 + x_2^2)$ auf dem Rand B^* . Mit U_i bezeichnen wir die Näherungslösung im Punkte P_i . Die U_i sind Lösung des linearen Gleichungssystems (36):

$$\begin{aligned} -4U_1 + U_2 + U_4 &= -1,35406, \\ +U_1 - 4U_2 + U_3 + U_5 &= -0,79588, \\ +U_2 - 4U_3 + U_6 &= -1,69792, \\ +U_1 - 4U_4 + U_5 + U_7 &= -0,51188, \\ +U_2 + U_4 - 4U_5 + U_6 + U_8 &= 0, \\ +U_3 + U_5 - 4U_6 + U_9 &= -0,79588, \\ +U_4 + U_5 - 4U_7 + U_8 &= -0,81732, \\ +U_5 + U_7 - 4U_8 + U_9 &= -0,51188, \\ +U_6 + U_8 - 4U_9 &= -1,35406, \end{aligned}$$

Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned} U_1 &= 0,66522, & U_2 &= 0,72542, & U_3 &= 0,78719, \\ U_4 &= 0,58138, & U_5 &= 0,65340, & U_6 &= 0,72542, \\ U_7 &= 0,49502, & U_8 &= 0,58138, & U_9 &= 0,66522. \end{aligned}$$

Für die Fehlerschätzung berechnen wir einen Schätzwert für b_8 . Wir bilden entsprechend (29) die vierten Differenzen auf den jeweils fünf Rand-Gitterpunkten. Es ergibt sich für den linken und den unteren Rand jeweils $+0,00148$ und für den rechten und den oberen Rand jeweils $+0,00042$. Also ist $8! b_8 h^8 \approx \frac{1}{4} (2 \cdot 0,00148^2 + 2 \cdot 0,00042^2) = 11834 \cdot 10^{-10}$. Zur Abkürzung

setzen wir $\beta_i = \sum_{j=1}^9 b_{ij}$ und berechnen die β_i entsprechend (39) als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -4\beta_1 + \beta_2 + \beta_4 &= 1, \\ +\beta_1 - 4\beta_2 + \beta_3 + \beta_5 &= 1, \\ +\beta_2 - 4\beta_3 + \beta_6 &= 1, \\ +\beta_1 - 4\beta_4 + \beta_5 + \beta_7 &= 1, \\ +\beta_2 + \beta_4 - 4\beta_5 + \beta_6 + \beta_8 &= 1, \\ +\beta_3 + \beta_5 - 4\beta_6 + \beta_9 &= 1, \\ +\beta_4 + \beta_5 - 4\beta_7 + \beta_8 &= 1, \\ +\beta_5 + \beta_7 - 4\beta_8 + \beta_9 &= 1, \\ +\beta_6 + \beta_8 - 4\beta_9 &= 1. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\beta_1 = \beta_3 = \beta_7 = \beta_9 = -\frac{11}{16}, \quad \beta_2 = \beta_4 = \beta_6 = \beta_8 = -\frac{14}{16}, \quad \beta_5 = -\frac{18}{16}$$

und damit lassen sich nach (38) die folgenden Schätzwerte für $E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2]$ berechnen, die wir wie oben die P_i und auch die U_i angeordnet aufschreiben:

$$\begin{array}{ccc} 84 \cdot 10^{-10}, & 137 \cdot 10^{-10}, & 84 \cdot 10^{-10}, \\ 137 \cdot 10^{-10}, & 226 \cdot 10^{-10}, & 137 \cdot 10^{-10}, \\ 84 \cdot 10^{-10}, & 137 \cdot 10^{-10}, & 84 \cdot 10^{-10}. \end{array}$$

Daraus berechnen sich die Schätzwerte für $\sqrt{E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2]}$ zu

$$\begin{array}{ccc} 0,00009, & 0,00012, & 0,00009, \\ 0,00012, & 0,00015, & 0,00012, \\ 0,00009, & 0,00012, & 0,00009. \end{array}$$

Da in diesem Beispiel die exakte Lösung (nämlich $10 \log(x_1^2 + x_2^2)$) bekannt ist, können wir zum Vergleich die tatsächlichen Fehler e_i in den Punkten P_i angeben:

$$\begin{array}{ccc} e_1 = 0,00011, & e_2 = 0,00012, & e_3 = 0,00008, \\ e_4 = 0,00017, & e_5 = 0,00019, & e_6 = 0,00012, \\ e_7 = 0,00017, & e_8 = 0,00017, & e_9 = 0,00011. \end{array}$$

Als Anhalt für die ungefähre Größe des Fehlerquadrates berechnen wir noch nach (39):

$$\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 E[e(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \omega)^2] \approx \frac{1}{9} 608 b_s h^8 \sum_{i=1}^9 \left(\sum_{j=1}^9 b_{ij} \right)^2 = 123 \cdot 10^{-10}.$$

Die Wurzel daraus $\sqrt{123 \cdot 10^{-10}} = 0,00011$ gibt die Größenordnung der tatsächlichen Fehler sehr schön wieder.

Literatur

- [1] L. COLLATZ, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955, Springer-Verlag.
- [2] B. W. GNEDENKO, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Übersetzung aus dem Russischen) Berlin 1957, Akademie-Verlag.
- [3] K. ITÔ, Isotropic random current, Proc. third Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. II (1956), S. 125—132.
- [4] S. ITÔ, On the canonical form of turbulence, Nagoya Math. Journ. 2 (1951), S. 83—92.
- [5] A. M. JAGLOM, Einige Klassen von Zufallsfeldern im n -dimensionalen Raum, die mit den stationären zufälligen Prozessen verwandt sind (Russisch mit englischer Zusammenfassung), Teorija Verojatnostej i ee Primenenija (Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung) 2 (1957), S. 292—338.
- [6] A. M. JAGLOM, Einführung in die Theorie stationärer Zufallsfunktionen (Übersetzung aus dem Russischen) Berlin 1959, Akademie-Verlag.
- [7] J. KAMPÉ DE FÉRIET, Random solutions of partial differential equations, Proc. third Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. III (1956), S. 199—208.
- [8] K. KARHUNEN, Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse, Ann. Acad. Sci. Fenn. 34 (1946).
- [9] K. KARHUNEN, Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fenn. 37 (1947).
- [10] A. KHINTCHINE, Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, Math. Ann. 109 (1934), S. 604—615.
- [11] A. M. OBUCHOW, Statistische Beschreibung stetiger Felder. In: Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz (Übersetzung aus dem Russischen), Berlin 1958, Akademie-Verlag.
- [12] I. G. PETROWSKI, Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen (Übersetzung aus dem Russischen), Würzburg 1953, Physica-Verlag.
- [13] I. G. PETROWSKI, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen (Übersetzung aus dem Russischen), Leipzig 1955, B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft.
- [14] H. P. ROBERTSON, The invariant theory of isotropic turbulence, Proc. Cambridge Phil. Soc. 36 (1940), S. 209—223.
- [15] I. J. SCHOENBERG, Metric spaces and completely monotone functions, Annals of Math. 39 (1938), S. 811—841.
- [16] E. SLUTSKY, Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes, Actualités Scientifiques et Industrielles 738 (1938).
- [17] W. UHLMANN, Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Integrationsformeln von Newton-Cotes, Z. f. angew. Math. u. Physik X (1959), S. 189—207.
- [18] A. C. ZAAZEN, Linear Analysis, Noordhoff-Groningen 1956, North-Holland Publ. Co. — Amsterdam.

Manuskripteingang: 30. 1. 1961

Anschrift: Dr. W. UHLMANN, Hamburg 1, Langereihe 27

Instabilität stoßfreier transsonischer Profilströmungen^{*)}

Von WOLFGANG WERNER

Transsonische stetige Profilströmungen werden mit Methoden der Störungsrechnung auf Stabilität bezüglich kleiner zeitabhängiger Störungen untersucht. Es ergibt sich, daß sie in der Nähe des rückwärtigen Endes des Überschallgebietes instabiles Verhalten zeigen. Der zeitliche Verlauf einer gestörten Strömung wird numerisch berechnet. Es zeigt sich eine deutliche Tendenz zur Ausbildung eines stationären Stoßes am rückwärtigen Ende des Überschallgebietes.

Stability of continuous transonic flows past profiles is investigated by use of perturbation theory. The investigation shows that such flows are unstable near the rear end of the supersonic region. The time dependent changes of a perturbed flow are computed numerically. The calculation shows a clear tendency toward the formation of a stationary shock.

Сверхзвуковые непрерывные профильные течения исследуются методом возмущения на устойчивость относительно небольших зависящих от времени возмущений. Вблизи задней границы сверхзвуковой области они оказываются неустойчивыми. Вычисляется поведение возмущённого течения в зависимости от времени. Видна тенденция к образованию стационарного толчка вблизи задней границы сверхзвуковой области.

Einleitung

Untersucht werden Profilströmungen folgender Art: Ein ebenes, symmetrisches Profil P wird mit einer solchen Unterschallgeschwindigkeit angeströmt, daß in einem Bereich D (Bild 1), zu dessen Berandung ein Teil der Kontur gehört, die Strömungsgeschwindigkeit größer ist als die Schallgeschwindigkeit (transsonische Profilströmung). Es ist bekannt, daß eine stetige, stationäre Umströmung solcher Profile nur in Ausnahmefällen (bei „zulässigen“ Profilen) möglich ist. Mit Methoden der Störungsrechnung wird gezeigt, daß die stetige Strömung um ein „zulässiges“ Profil in gewissen Gebieten instabil ist bezüglich kleiner zeitabhängiger Störungen. Deshalb kann im allgemeinen eine stationäre Umströmung höchstens dann noch möglich sein, wenn Unstetigkeiten der Lösung zugelassen werden, wenn also Stöße auftreten dürfen.

Auf numerischem Wege wird das Verhalten der Strömung um ein „zulässiges“ Profil untersucht, nachdem kleine Störungen vorgenommen wurden. Es zeigt sich eine klare Tendenz zur Ausbildung eines stationären Stoßes an der Rückseite des Überschallgebietes.

§ 1. Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen

Wir betrachten folgendes System von partiellen Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dt} + \nabla v &= 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\varrho} \nabla p &= 0, \\ \frac{dS}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.1).$$

Hierin bedeutet: $v = (u, v)$: Geschwindigkeitsvektor.

Den später ebenfalls verwendeten Geschwindigkeitsbetrag bezeichnen wir mit w .

p : Druck

S : Entropie

$a^2 = 1 / \frac{\partial \varrho}{\partial p}$: Quadrat der Schallgeschwindigkeit

$\varrho = \varrho(p, S)$: Dichte (die Funktion $\varrho = \varrho(p, S)$ ist vorgegeben)

der Operator ∇ : $= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$

der Operator $\frac{d}{dt}$: $= \frac{\partial}{\partial t} + v \nabla$.

Die erste Gleichung (1.1) ist die Kontinuitätsgleichung, die zweite die Bewegungsgleichung, die dritte drückt die Konstanz der Entropie längs der Stromlinien aus (Energiesatz).

^{*)} Die Arbeit ist ein Auszug aus einer Abhandlung, die von der Technischen Hochschule München als Dissertation angenommen wurde.

Lösungen des Systems (1.1) können als ebene stetige Strömungen eines reibungs- und wärmeleitungs-freien Gases um ein mit Unterschallgeschwindigkeit angeströmtes Profil P gedeutet werden, wenn folgende notwendigen Bedingungen erfüllt sind:

(1a): Eine Lösung $v(x, y, t)$, $a(x, y, t)$, $\rho(x, y, t)$, $S(x, y, t)$ von (1.1) ist definiert außerhalb P und auf P selbst und ist dort eindeutig und stetig. Die vorkommenden Ableitungen bezüglich x, y, t existieren.

(1b): Auf dem Profil P ist die Randbedingung $(v \cdot n) = 0$ erfüllt, wobei n die Profilnormale bezeichnet.

(1c): $w \rightarrow w_\infty < a_\infty$ für $x, y \rightarrow \infty$.

Das Koordinatensystem sei so orientiert, daß die x -Achse parallel zur Anströmrichtung im Unendlichen ist.

In der Strömung eines reibungs- und wärmeleitungs-freien Gases können Linien auftreten, über die hinweg v , a , ρ und S sich unstetig ändern. Man bezeichnet solche Linien als Stoßfronten. Sie können nur bei verzögerter Überschallströmung auftreten. Die unstetigen Änderungen von v , a , ρ , und S sind nicht willkürlich, sondern werden durch Bedingungen beherrscht, die aus den Erhaltungssätzen für Masse, Energie und Impuls abgeleitet sind und die man als die Stoßbedingungen bezeichnet.

Zur Beschreibung von Strömungen mit Stößen hat man die obige Bedingung durch folgende neue Bedingungen zu ersetzen:

(1d): $v(x, y, t)$, $a(x, y, t)$, $\rho(x, y, t)$, $S(x, y, t)$ sind eindeutig und stetig außer an den Stoßfronten. Ihr Sprung über die Stoßfronten hinweg wird durch die Stoßbedingungen eindeutig beschrieben. Für die Ableitungen gilt das in (1a) gesagte, außer an den Stoßfronten.

Wir machen noch folgende Annahme: Zu Beginn des Vorgangs habe die Entropie im Medium überall denselben Wert. Dann behält sie im ganzen Medium für alle Zeiten diesen Wert, solange keine Stöße auftreten.

Beschränkt man die Betrachtungen auf stationäre, stetige Strömungen, so kann man durch die Annahme der Wirbelfreiheit ein Potential $\varphi(x, y)$ einführen, für das $\varphi(x, y) = \text{grad } v(x, y)$ gilt. Dann erhält man an Stelle des Systems (1.1) eine quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von folgender Gestalt:

$$(a^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} + (a^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} - 2 \varphi_x \varphi_y = 0 \quad \dots \quad (1.2).$$

Der Zusammenhang zwischen den abhängigen Variablen in (1.1) und (1.2) ist gegeben durch

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = w^2; \quad \varphi_x = u, \quad \varphi_y = v.$$

Die oben aufgestellten Bedingungen (1a)–(1c) sind jetzt zu ersetzen durch

(1e): Eine Lösung $\varphi(x, y)$ von (1.2) ist definiert außerhalb P und auf P selbst. Die Ableitungen φ_x , φ_y existieren dort und sind eindeutig und stetig. Die zweiten Ableitungen existieren.

(1f): Auf dem Rand P gilt $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

(1g): $\varphi_x \rightarrow w_\infty < a_\infty$, $\varphi_y \rightarrow 0$ für $x, y \rightarrow \infty$.

Wie man leicht sieht, ist Gleichung (1.2) elliptisch, wenn $w < a$ und hyperbolisch, wenn $w > a$.

§ 2. Stationäre, stetige, transsonische Profilströmungen

Bei gegebenem Profil P sei mit $\hat{w}_{\infty p}$ die Anströmgeschwindigkeit bezeichnet, für die $\max \{w/a\} = 1$. In diesem Falle besteht folgender Existenzsatz:

Bei vorgegebenem Profil P und gegebenem $w_\infty < \hat{w}_{\infty p}$ gibt es genau eine Lösung $\varphi(x, y)$ von Gleichung (1.2), welche die Bedingungen (1e)–(1g) erfüllt.

Wird w_∞ größer als $\hat{w}_{\infty p}$, so entsteht auf dem Profil P und in einer gewissen Umgebung davon ein Gebiet, in dem $w > a$ ist. Gleichung (1.2) wird dann vom gemischten elliptisch-hyperbolischen Typ. In diesem Falle gilt kein dem obigen Existenzsatz entsprechender Satz; vielmehr zeigt sich folgendes: Das zu lösende Randwertproblem ist nicht sachgemäß gestellt und läßt daher im allgemeinen keine Lösung mehr zu, die den Bedingungen (1e)–(1g) genügt. Ein Profil, für welches das Randwertproblem unter Beachtung von (1e)–(1g) jedoch gelöst werden kann, soll hier als „zulässiges“ Profil bezeichnet werden.

Dann gilt folgender Satz:

$\varphi(x, y)$ sei das Potential einer Strömung um ein „zulässiges“ Profil P (siehe Bild 1). Das Überschallgebiet D ist von der Schalllinie S und dem Bogenstück AB begrenzt. Die zwei von einem Punkt C der Schalllinie ausgehenden Charakteristiken treffen das Bogenstück AB in den Punkten A_1 bzw. B_1 . Wird P längs des Bogenstücks A_1B_1 beliebig wenig abgeändert, so gibt es keine Lösung von Gleichung (1.2), welche bei gleichem w_∞ für das neue Profil P' die Bedingungen (1e)—(1g) erfüllt.

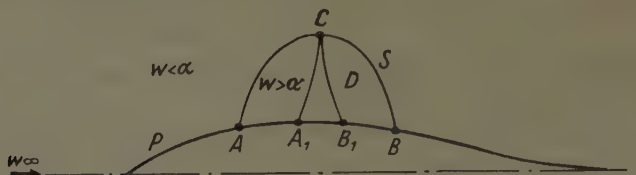


Bild 1

Es ist also keine stetige Umströmung von P' mit derselben Anströmgeschwindigkeit mehr möglich [1].

Hier sind nun Bemerkungen über den experimentellen Tatbestand angebracht. Obwohl Messungen im transsonischen Gebiet sehr problematisch sind, besteht allgemein Übereinstimmung darin, daß Windkanalversuche zeigen, daß bei Überschreitung der Schallgeschwindigkeit auf einem konvexen Profil die Strömung entweder instationär wird oder Stöße enthält oder beides auftritt. Zur Erklärung der Tatsache, daß keine stetigen transsonischen Strömungen beobachtet werden, wurde bisher immer der oben erwähnte Satz über die Nichtexistenz von Nachbarlösungen herangezogen, wobei folgendermaßen argumentiert wurde: Selbst wenn es gelänge, ein im obigen Sinne „zulässiges“ Profil mathematisch genau herzustellen, würden die in jeder Strömung vorhandenen Grenzschichtinflüsse kleine Abweichungen von diesem Profil erzeugen, die keine stetigen Nachbarlösungen mehr zulassen.

Im nächsten Paragraphen wird mit Methoden der Störungsrechnung gezeigt werden, daß die experimentelle Nichtexistenz von stetigen transsonischen Strömungen der oben beschriebenen Art auch durch Instabilität einer „zulässigen“ Strömung gegenüber kleinen zeitabhängigen Störungen erklärt werden kann.

§ 3. Störungsrechnung für das zeitabhängige Problem

In diesem Paragraphen wird ein hinreichendes Kriterium aufgestellt für die Instabilität von stetigen Lösungen von (1.2) bezüglich kleiner zeitabhängiger Störungen.

Wir betrachten zunächst das System (1.1), beschränken uns aber auf isentropische Strömungen, so daß die dritte Gleichung (1.1) bereits überall erfüllt ist. In diesem System wollen wir die zur Beschreibung der Strömung geeignetsten Koordinaten einführen, nämlich die Stromlinien und deren Orthogonaltrajektorien. Wir fassen einen Punkt auf einer Stromlinie ins Auge. Der Tangentenvektor an die Stromlinie sei mit \mathbf{n}_1 bezeichnet, der dazu orthogonale Normalvektor mit \mathbf{n}_2 . ϑ bezeichne den Winkel zwischen Tangentenvektor und einer festen Bezugsrichtung, z. B. der Anströmrichtung im Unendlichen; die Richtungsableitungen $\mathbf{n}_i \cdot \nabla \Phi$ ($i = 1, 2$) bezeichnen wir durch: $\mathbf{n}_1 \cdot \nabla \Phi = \Phi_s$; $\mathbf{n}_2 \cdot \nabla \Phi = \Phi_n$. Außerdem nehmen wir an, daß es sich um die Strömung eines idealen Gases mit konstanten spezifischen Wärmen c_v und c_p mit $c_p/c_v = \kappa$ handelt. Durch die dann geltende Beziehung

$$\frac{1}{\rho a} dp = \frac{2}{\kappa - 1} da$$

lassen sich p und ρ aus den ursprünglichen Gleichungen eliminieren und man erhält an Stelle von System (1.1):

$$\frac{2}{\kappa - 1} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + w a_s \right] + a w_s = -a w \vartheta_n \quad \dots \quad (3.1),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w w_s + \frac{2}{\kappa - 1} a a_s = 0 \quad \dots \quad (3.2),$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + w \vartheta_s + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{a}{w} a_n = 0 \quad \dots \quad (3.3).$$

Mit diesen drei Gleichungen wollen wir folgende Störungsrechnung durchführen. Wir nehmen an, wir kennen ein Profil, um das eine stationäre Strömung möglich ist. Die diese Strö-

ung beschreibende Lösung von (1.2) sei mit $\varphi_0(x, y)$ bezeichnet. Damit ist auch eine Lösung $w_0(x, y)$, $a_0(x, y)$, $\vartheta_0(x, y)$ des zuletzt angeschriebenen Systems bekannt, welche durch die Beziehungen

$$\varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2 = w_0^2; \quad a_0^2 = \bar{a}_0^2 - \frac{\kappa-1}{2} w_0^2; \quad \tan \vartheta_0 = \frac{\varphi_{0y}}{\varphi_{0x}} \quad (3.4)$$

bestimmt ist. Darin ist \bar{a}_0 die Ruheschallgeschwindigkeit. Die Randbedingung lautet

$$\tan \vartheta_0 = k'(x) \quad (3.5),$$

wobei $y = k(x)$ die Gleichung der Kontur ist und der Strich d/dx bedeutet.

Wir beschränken unsere Betrachtung auf eine hinreichend kleine Umgebung der Konturstromlinie. Dort bringen wir zur Zeit $t = t_0$ Störungen $A(x, y, t_0)$, $W(x, y, t_0)$, $\theta(x, y, t_0)$ an und erhalten damit eine instationäre Strömung, die durch $a = a_0 + A$, $w = w_0 + W$, $\vartheta = \vartheta_0 + \theta$ gekennzeichnet ist. Die neue Strömung soll wieder isentropisch sein, also die Gleichungen (3.1) bis (3.3) erfüllen.

Wie wir gleich sehen werden, können wir zur Zeit $t = t_0$ für den betrachteten Bereich fordern:

$$\theta|_{t=t_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (3.6);$$

und können dann noch einen Zusammenhang zwischen A und W vorgeben. Dann stellt Gleichung (3.3) eine Differentialgleichung für $\bar{W} = W|_{t=t_0}$ in dem betrachteten Bereich dar. Eine Lösung \bar{W} dieser Gleichung und das damit auch bestimmte $\bar{A} = A|_{t=t_0}$ ergeben eine isentropische gestörte Strömung die zur Zeit $t = t_0$ die Randbedingung der ursprünglichen Kontur erfüllt. Unter der Annahme $a_0 \gg \bar{A}$; $w_0 \gg \bar{W}$ werden wir zeigen, daß diese Strömung in einem hinreichend kleinem Zeitintervall $t - t_0$ die Randbedingung auf der Kontur $k(x)$ bis auf Größen zweiter Ordnung erfüllt. Zur Zeit $t = t_0$ gilt nach Gleichung (3.3)

$$0 = -(w_0 + \bar{W}) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = (w_0 + \bar{W})^2 \vartheta_{0s} + \frac{2}{\kappa-1} (a_0 + \bar{A}) (a_{0n} + \bar{A}_n) \quad (3.7).$$

Darin ist $w_0^2 \vartheta_{0s} + \frac{2}{\kappa-1} a_0 a_n = 0$. Die verbleibende Gleichung ist die eben erwähnte Gleichung zur Bestimmung von \bar{W} und \bar{A} . Zur Zeit $t_0 + \Delta t$ gilt

$$-(w_0 + W) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 2 w_0 W \vartheta_s + \frac{2}{\kappa-1} (a_{0n} A + a_0 A_n) \quad (3.8).$$

Beachtet man (3.6), so sieht man, daß bei hinreichend kleinem Δt die Änderung der Kontur beschreibende Größe $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ klein von zweiter Ordnung wird.

Für A und W erhalten wir bei Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung jetzt folgendes Gleichungssystem

$$\frac{\partial A}{\partial t} + w_0 A_s + W a_{0s} + \frac{\kappa-1}{2} [A w_{0s} + a_0 W_s + (a_0 W + w_0 A) \vartheta_n] = 0 \quad (3.9),$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + w_0 W_s + W w_{0s} + \frac{2}{\kappa-1} [a_0 A_s + A a_{0s}] = 0 \quad (3.10).$$

Wir wollen unsere Untersuchungen jetzt auf ein Gebiet beschränken, in dem die Strömungsgeschwindigkeit hinreichend nahe bei der Schallgeschwindigkeit ist, so daß $\left| \frac{w_0}{a_0} - 1 \right| = |M_0 - 1|$ von erster Ordnung klein wird.

Dann erfüllt die spezielle Anfangsvorgabe $\bar{W} = \bar{A}/2 = \text{const}$ die Randbedingung (3.7) bis auf Größen zweiter Ordnung. Es gilt nämlich (wenn man $\bar{W} = \bar{A}/2 = \text{const}$ in (3.7) einsetzt):

$$-w_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 2 w_0 \bar{W} \vartheta_s + \frac{4}{\kappa-1} W a_{0n} \quad (3.11).$$

Beachtet man die aus (3.3) folgende Beziehung

$$\frac{2}{\kappa-1} a_{0n} = -M_0 w_0 \vartheta_s \quad (3.12),$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 2 \bar{W} \vartheta_s (M_0 - 1) \quad (3.13).$$

Durch die Annahme, daß W zur Zeit $t = t_0$ im betrachteten Bereich überall denselben Wert \bar{W} hat und analoges für A gilt, erhalten wir an Stelle der partiellen Differentialgleichungen (3.9) und (3.10) ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zur Bestimmung von $\partial W/\partial t$ und $\partial A/\partial t$ zur Zeit $t = t_0$, nämlich

$$\frac{\partial A}{\partial t} + W a_{0s} + \frac{\kappa - 1}{2} [A w_{0s} + (a_0 W + w_0 A) \vartheta_n] = 0 \quad (3.14),$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + w_{0s} W + \frac{2}{\kappa - 1} a_{0s} A = 0 \quad (3.15).$$

Aus (3.1) folgt

$$\frac{2}{\kappa - 1} w_0 a_{0s} + a_0 w_{0s} = -a_0 w_0 \vartheta_n \quad (3.16)$$

und daraus mit (3.2)

$$w_0 \vartheta_n = w_{0s} (M_0^2 - 1) \quad (3.17),$$

d. h. $W_0 \vartheta_n$ ist klein von erster Ordnung, damit ist aber der letzte Summand in der eckigen Klammer von Gleichung (3.14) klein von zweiter Ordnung. Außerdem ersetzen wir a_{0s} mit Hilfe von Gleichung (3.2) durch

$$a_{0s} = -\frac{\kappa - 1}{2} M_0 w_{0s}.$$

Wir erhalten jetzt also an Stelle von Gleichung (3.14) und (3.15)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\kappa - 1}{2} w_{0s} (A - M_0 W) = 0 \quad (3.18)$$

und

$$\frac{\partial W}{\partial t} + w_{0s} (W - M_0 A) = 0 \quad (3.19).$$

Macht man für A und W einen Exponentialansatz

$$A = C_A e^{\lambda(t-t_0)} \quad W = C_W e^{\lambda(t-t_0)},$$

so erhält man zur Bestimmung der Eigenwerte folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\kappa - 1}{2} w_{0s} + \lambda & -\frac{\kappa - 1}{2} w_{0s} M_0 \\ -w_{0s} M_0 & w_{0s} + \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = w_{0s} \left[-\frac{\kappa + 1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa + 1}{4}\right)^2 + \frac{\kappa - 1}{2} (M_0^2 - 1)} \right] = \begin{cases} w_{0s} \cdot \frac{\kappa - 1}{2} (M_0^2 - 1) \\ w_{0s} \left[-\frac{\kappa + 1}{2} - \frac{\kappa - 1}{2} (M_0^2 - 1) \right] \end{cases} \quad (3.21).$$

Aus (3.21) können zwei hinreichende Kriterien für Instabilität der transsonischen Strömung abgelesen werden:

- (1) $w_{0s} > 0$
 - (a) $M_0 < 1$: Beide Wurzeln sind negativ; die Strömung ist stabil.
 - (b) $M_0 > 1$: Eine Wurzel ist negativ, eine positiv. Die positive Wurzel ist jedoch von der Ordnung $|M - 1|$, so daß die von ihr herrührenden Änderungen von W und A von zweiter Ordnung klein sind. Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung in der Störungsrechnung würde wahrscheinlich zeigen, daß die Strömung stabil ist.
- (2) $w_{0s} < 0$: Sowohl für $M_0 > 1$, als auch für $M_0 < 1$ tritt eine positive Wurzel auf, die von der gleichen Größenordnung ist wie $|w_{0s}|$. Damit werden $\lambda(t - t_0)$ und somit auch die Änderungen von W und A Größen erster Ordnung. Die Strömung ist also instabil.

Damit ist folgendes gezeigt: Die verwendete spezielle Störung führt im Überschallbereich einer transsonischen isentropischen Strömung, deren Machzahl hinreichend nahe bei 1 ist, auf jeden Fall zur Instabilität. Dabei erfüllt die gestörte instabile Strömung in einem hinreichend kleinen Zeitintervall die Randbedingung der ungestörten Strömung bis auf Größen zweiter Ordnung. Es ist wohl anzunehmen, daß auch andere Störungen als die hier verwendete zu

Instabilitäten führen können. Wie man sich leicht überzeugt, führt z. B. eine Störung, bei der $W_s = 2 A_s/(\kappa - 1)$ für $t = t_0$ ist, auch zu (3.21). Das Ergebnis deutet darauf hin, daß die beobachtete Nichtexistenz von transsonischen Profilströmungen auch mit Instabilität gegenüber kleinen zeitabhängigen Störungen erklärt werden kann.

Der Vergleich mit dem im Paragraphen 2 besprochenen Nichtexistenzsatz zeigt: Wo im stationären Fall keine Nachbarlösung existiert, besteht hier eine Instabilität bezüglich kleiner zeitabhängiger Störungen. Bringt man nämlich irgendwo zwischen den Punkten A und B (Bild 1) eine Störung an, so wird diese spätestens im Punkt B einen instabilen Vorgang auslösen. Das bedeutet aber, daß jede Störung von der oben beschriebenen Art im Überschallbereich mit Sicherheit zur Instabilität führt.

Damit verbleiben für den Strömungstyp nach der Störung nur noch zwei Möglichkeiten:

a) Es entstehen Stöße, und die Strömung wird wieder stationär. (Die Formel (3.21) bezieht sich auf den isentropischen, stetigen Fall und schließt daher stationäre nichtisentropische, nicht stetige Strömungen nicht aus.)

b) Die Strömung bleibt für alle Zeiten $t > t_0$ instationär, wobei Stöße auftreten können oder nicht.

§ 4. Ein Programm zur numerischen Berechnung des instationären Vorgangs

Als Beitrag zur Klärung der am Schluß des letzten Paragraphen aufgeworfenen Frage soll hier mit Hilfe eines „mathematischen Experiments“ der Verlauf der gestörten Strömung in einem gewissen Zeitintervall verfolgt werden.

Als Ausgangspunkt wollen wir eine Lösung $\varphi_0(x, y)$ von (1.2) nehmen, welche die Bedingungen (1e)–(1g) erfüllt und für die $w_\infty > \tilde{w}_{\infty p}$ ist. Nach dem Ergebnis der Störungsrechnung ist eine solche Lösung mindestens an einer Stelle instabil bezüglich bestimmter kleiner zeitabhängiger Störungen. Beginnt man mit den Anfangswerten $\varphi_0(x, y)$ mit irgend einem numerischen Verfahren zur Lösung instationärer Probleme zu rechnen, so müßte die zur Zeit $t = t_0$ gegebene Anfangsvorgabe für alle Zeiten $t > t_0$ erhalten bleiben, wenn durch die Rechnung keine Verfahrens- und Rundungsfehler aufträten. Nachdem solche Fehler aber mit Sicherheit auftreten, kann eine Störung im obigen Sinne simuliert werden, die zur Auslösung des instationären Vorgangs führen kann. Außerdem werden bei der numerischen Berechnung der Lösung $\varphi_0(x, y)$ kleine Fehler auftreten, die ebenfalls als Störung im Sinne des Paragraphen 3 zur Auswirkung kommen können. Es ist also zu erwarten, daß sich der Strömungszustand im Laufe der Zeit vom Zustand $\varphi_0(x, y)$ entfernen wird.

Dabei bleibt zunächst die Frage offen, ob der am Ende des Paragraphen 3 beschriebene Fall a) oder der Fall b) eintreten wird. Im Falle a) erhebt sich noch folgendes Problem: Zum Zwecke der numerischen Behandlung hat man die Strömungsdifferentialgleichungen durch Differenzengleichungen zu ersetzen. Die Stoßbedingungen, die man auch noch zu berücksichtigen hat, sind ihrer Natur nach einem Differenzenverfahren schwer zugänglich. Im Falle der instationären eindimensionalen Strömung sind zwar in jüngster Zeit Verfahren vorgeschlagen worden, die durch die Hinzunahme von „Pseudoviskositätsgliedern“ zum System (1.1) in gewissen Fällen die differenzmäßige Behandlung von Stößen möglich machen; im zweidimensionalen instationären Fall würde ein solches Verfahren, abgesehen von seiner Problematik, jedoch einen Mehraufwand an Rechnung bedeuten, der zum Zeitpunkt der Rechnung die Kapazität der an der TH-München vorhandenen Rechenanlage PERM überstiegen hätte. Infolgedessen sind wir nur in dem wenig wahrscheinlichen Fall, daß kein stationärer Zustand erreicht wird und keine Stöße auftreten, in der Lage, die Strömung im Sinne des Differenzenverfahrens genau zu verfolgen.

Aber auch wenn Stöße auftreten, sind noch Aussagen möglich. Eventuell entstehende Stöße sind zunächst schwach. Dabei ist unter „schwach“ folgendes zu verstehen: Wir betrachten irgend eine der Größen $|(p - \tilde{p})/p|$, $|(q - \tilde{q})/q|$ oder $|(w - \tilde{w})/w|$ und nehmen sie als Maß für die Stoßstärke. Ist z. B. $|(w - \tilde{w})/w| \ll 1$, so spricht man von schwachen Stößen. Dann gilt für die Entropieänderung

$$|S - \tilde{S}| = O \left\{ \left| \frac{w - \tilde{w}}{w} \right|^3 \right\} \dots \dots \dots (4.1).$$

(Die Differenzen beziehen sich auf Zustände vor und hinter dem Stoß.)

Unter diesen Umständen ist es also sicher möglich, Aussagen über das Auftreten von Stößen zu machen. Man wird das Entstehen von Stößen an einem starken Anwachsen des Geschwindigkeitsgradienten erkennen können. Aus der zeitlichen Veränderung der Lage dieser „Stöße“ wird man unter Umständen auch auf deren Stabilität schließen können; nämlich dann, wenn die Lage der „Stöße“ zeitlich konstant bleibt, während sich die Strömungsdaten außerhalb der „Stoßgebiete“ laufend verändern, wird man auf Grund von (4.1) annehmen dürfen, daß bei Hinzunahme

der Stoßbedingungen Stöße auftreten werden, die bezüglich ihrer Lage stabil sind und die etwa an denselben Stellen entstehen werden, wie die „Stöße“ der Differenzenrechnung ohne Berücksichtigung der Stoßbedingungen.

Keine Aussagen werden allerdings möglich sein, wenn keine stabile Lage der „Stöße“ erkennbar wird. Dieses Ergebnis könnte zweierlei Ursachen haben:

a) Es könnte reell sein, d. h. es gibt auch bei Zulassung von Stößen keine stationäre Lösung der vorliegenden Aufgabe.

b) Die schlechte Approximation der Differentialgleichungen durch die Differenzengleichungen in Gebieten mit großem Geschwindigkeitsgradienten macht die Berechnung einer tatsächlich existierenden stationären Lösung von Anfang an unmöglich.

Bei der Berechnung der Lösung $\varphi_0(x, y)$ wird nicht die Zustandsgleichung des idealen Gases zugrunde gelegt, sondern eine Approximation derselben. Der Übergang zur Gleichung des idealen Gases bei der Durchführung der zeitabhängigen Rechnung ist gleichbedeutend mit einer kleinen Änderung der Strömungsdaten, die ebenfalls im Sinne der eben besprochenen Störungen wirken kann.

Eine wichtige Rolle bei der Lösung der hier gestellten Aufgabe spielt natürlich die Stabilität des verwendeten Differenzenverfahrens. Nachdem es sich um nichtlineare Gleichungen handelt, ist eine theoretische Aussage hierüber im Augenblick kaum möglich. Aus diesem Grunde wurden numerische, experimentelle Stabilitätsuntersuchungen der Differenzengleichungen angestellt.

Es handelt sich hier um ein hyperbolisches System. Aus Untersuchungen über lineare hyperbolische Systeme ist bekannt, daß die Verhältnisse der Maschenweiten bestimmten Bedingungen genügen müssen, um Stabilität und Konvergenz der Differenzenverfahren zu garantieren. So ist eine notwendige Bedingung für Stabilität und Konvergenz die, daß der Abhängigkeitsbereich der Differenzengleichung den Abhängigkeitsbereich der Differentialgleichung enthält (siehe z. B. [2]). Es ist sehr wahrscheinlich, daß diese oder eine ähnliche notwendige Bedingung auch bei nichtlinearen Systemen erhalten bleibt. Darum wurden die Maschenweitenverhältnisse so gewählt, daß die eben genannte Bedingung im voraussichtlich ungünstigsten Fall noch erfüllt ist.

Zum Zwecke der Untersuchungen wurde eine analytisch bekannte instationäre Strömung mit kleinen Störungen versehen. In den untersuchten Fällen ergab sich ein sehr schnelles Abklingen der Störungen. Bei den benutzten Maschenverhältnissen konnten keine Hinweise auf Instabilitäten des Differenzenverfahrens entdeckt werden.

Zur Berechnung der Lösung $\varphi_0(x, y)$ wurde eine von TOMOTIKA und TAMADA angegebene Methode benutzt [3].

§ 5. Charakteristikenverfahren zur Berechnung der instationären Strömung

I. Herleitung der charakteristischen Gleichungen

Wir gehen aus vom System (1.1). Bei Annahme von Isentropie und bei Verwendung der Zustandsgleichung des idealen Gases kann (1.1) geschrieben werden als

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{2a}{\kappa - 1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2a}{\kappa - 1} \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (5.2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2a}{\kappa - 1} \frac{\partial a}{\partial y} = 0 \quad (5.3).$$

Unter Benützung des in § 3 eingeführten lokalen Bezugssystems erhält man

$$\frac{\partial a}{\partial t} + w a_s + \frac{\kappa - 1}{2} [a w_s + a w \vartheta_n] = 0 \quad (5.4),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w w_s + \frac{2}{\kappa - 1} a a_s = 0 \quad (5.5),$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + w \vartheta_s + \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \frac{a}{w} a_n = 0 \quad (5.6).$$

Die Richtungsbedingung für die charakteristischen Flächenelemente dieses Systems lautet [4]:

$$\frac{dF}{dt} \left[\left(\frac{dF}{dt} \right)^2 - a^2 (F_s^2 + F_n^2) \right] = 0 \quad (5.7).$$

Setzt man die Lösung a, w, ϑ in einem bestimmten Raumbereich als bekannt voraus, so ist Gleichung (5.7) die Differentialgleichung der charakteristischen Flächen des Systems (5.1), (5.2), (5.3). Gleichung (5.7) zerfällt in die drei Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial t} + w F_s = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + (w + a) F_s = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + (w - a) F_s = 0$$

für die drei charakteristischen Flächenelemente F^*, F^{**}, F^{***} .

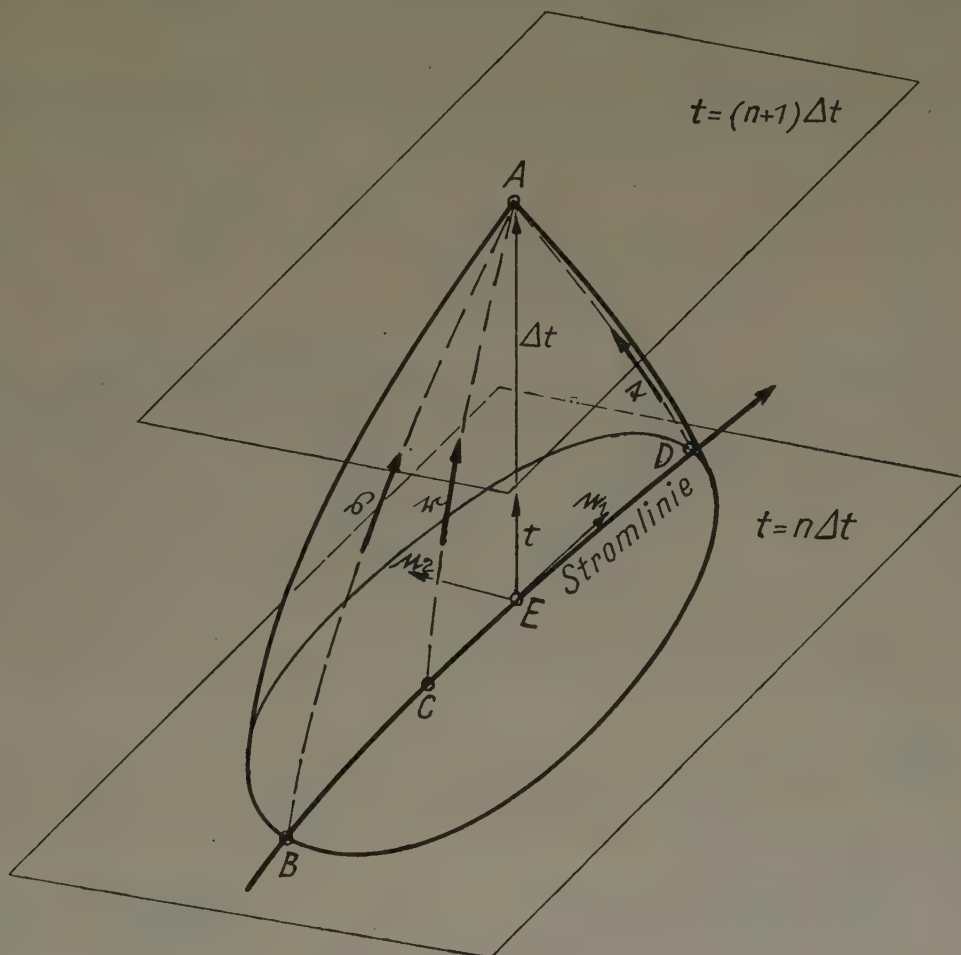


Bild 2

Das Flächenelement F^* enthält das Linienelement $r = (w t, 0, t)$. Seine Schnittkurve mit Ebenen $t = \text{const}$ stehe senkrecht auf n_1 . (Eigentlich ist F^* ein Ebenenbüschel mit der Achse r , aber wir wählen nur eine bestimmte Ebene aus.)

Die Flächenelemente F^{**} bzw. F^{***} enthalten die Linienelemente $s = ((w + a) t, 0, t)$ bzw. $t = ((w - a) t, 0, t)$. Ihre Schnittkurven mit Ebenen $t = \text{const}$ stehen ebenfalls senkrecht auf n_1 . Die Projektionen der Linienelemente in Ebenen $t = \text{const}$ fallen mit den Tangenten an die Stromlinien in diesen Ebenen zusammen. Ableitungen in Richtung der Linienelemente s und t sind innere Ableitungen auf den charakteristischen Flächen des Systems (5.4)–(5.6) (siehe Bild 2).

Multipliziert man Gleichung (5.5) mit ± 1 und addiert sie zu Gleichung (5.4), so erhält man zwei Gleichungen, die nur innere Ableitungen auf den charakteristischen Flächenelementen F^{**} bzw. F^{***} enthalten. Gleichung (5.6) enthält ohnehin nur Ableitungen in dem charakteristischen Flächenelement F^* . Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = \frac{d\Phi}{dt} + (w + a) \Phi_s, \quad \frac{d\Phi}{d\mu} = \frac{d\Phi}{dt} + (w - a) \Phi_s \quad \dots \dots \dots (5.8)$$

erhält man jetzt

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{2}{\kappa - 1} a + w \right) + a w \vartheta_n = 0 \quad \dots \dots \dots (5.9),$$

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{2}{\kappa - 1} a - w \right) + a w \vartheta_n = 0 \quad \dots \dots \dots (5.10),$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{a}{w} a_n = 0 \quad \dots \dots \dots (5.11).$$

Diese Form des Gleichungssystems ist für die numerische Behandlung des Anfangswertproblems besonders geeignet. (Siehe auch [5].)

II. Differenzenapproximation der charakteristischen Gleichungen

Um die Funktionswerte im Punkt A (Bild 2) zu bestimmen, setzen wir beim Differenzenverfahren

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\lambda} &= \frac{\Phi(A) - \Phi(B)}{\Delta t}, \\ \frac{d\Phi}{d\mu} &= \frac{\Phi(A) - \Phi(D)}{\Delta t}, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\Phi(A) - \Phi(C)}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.12).$$

Die Funktionswerte $\Phi(B)$, $\Phi(C)$ und $\Phi(D)$ sind bekannt, ebenso die Ableitungen Φ_n in diesen Punkten. Damit haben wir drei Gleichungen für die drei Unbekannten w , a , ϑ im Punkt A.

Zur Bestimmung der Vektoren r , s , t , deren Durchstoßpunkte B , C , D durch die Ebenen $t = \text{const}$ im allgemeinen keine Gitterpunkte sind, und zur Berechnung der gesuchten Größen aus dem Differenzengleichungssystem (5.12) wurde jeweils zwischen Ebenen $t = n \Delta t$ und $t = (n + 1) \Delta t$ gemittelt, so daß implizite Gleichungen entstanden. Zur Vergrößerung der Genauigkeit wurden die zu berechnenden Werte iterativ verbessert. Nachdem durch die Ableitungsbildungen Φ_n und Φ_n in Ebenen $t = n \Delta t$ und $t = (n + 1) \Delta t$ nicht nur die Werte in den Punkten A, B und C in die Rechnung eingehen, sondern auch die Werte in allen Nachbarpunkten, mußten bei einem Iterationsschritt die Werte in allen Punkten der Ebene $t = (n + 1) \Delta t$ neu berechnet werden, bevor zum nächsten Iterationsschritt übergegangen wurde. Dadurch entstand ein großer Bedarf an Speicherzellen.

III. Durchführung der numerischen Berechnung

Zur Berechnung der instationären Strömung wurde der interessierende Raumbereich in ein xy -Gitter mit 32×25 Gitterpunkten aufgeteilt (siehe Bild 3). Es wurden insgesamt 9 Zeitschritte ausgeführt. In den Gitterpunkten wurden die nach TOMOTIKA und TAMADA [3] berechneten Anfangswerte a_0 , w_0 , ϑ_0 vorgegeben.

Der Algorithmus des Rechenprogramms war als „Formel“-Programm in ALGOL-Sprache geschrieben. Dieses Formel-Programm wurde mit dem ALGOL-Formelübersetzungsprogramm des Rechenzentrums der TH München in die Maschinensprache übersetzt. Das so erzeugte Maschinenprogramm hatte eine Länge von 3027 Worten, einschließlich aller Unterprogramme.

Um die Berechnung der Strömung in einem möglichst großen xy -Bereich ausführen zu können, wurde das Programm so angelegt, daß die Zahl der als freier Speicher verfügbaren Zellen möglichst groß wurde. Dadurch wurde das Programm bezüglich der Rechengeschwindigkeit keineswegs optimal. Für die Berechnung (ohne Iteration) der Größen $a^{(n+1)}$, $w^{(n+1)}$, $\vartheta^{(n+1)}$ aus den in der Ebene $t = n \Delta t$ gegebenen Werten wurden pro Punkt 9,5 sec. benötigt.

Insgesamt betrug die Rechenzeit für die 9 Zeitschritte 84 Stunden. Dazu kamen noch 18 Stunden Rechenzeit für die Berechnung der a_0 , w_0 , ϑ_0 .

Zur Genauigkeit der Rechnung sei noch folgendes bemerkt: Es wurde iteriert, bis 5 Stellen von a und w bzw. 3 Stellen von ϑ standen. Mit Ausnahme des ersten Zeitschrittes waren dazu nie mehr als 3 Iterationen nötig. Beim ersten Zeitschritt war eine Iteration mehr erforderlich, wahrscheinlich auf Grund der Ungenauigkeiten bei der Berechnung der a_0 , w_0 , ϑ_0 .

§ 6. Diskussion des Ergebnisses

Das Ergebnis der Rechnung ist in Bild 3 bis Bild 5 in graphischer Form wiedergegeben. Die Zahlen können am Mathematischen Institut der TH München auf Wunsch eingesehen werden. Das Zahlenmaterial wurde im Hinblick auf folgende Merkmale ausgewertet:

a) Die Geschwindigkeit auf dem Profil und entlang mehrerer Linien $y = \text{const}$ für verschiedene Zeitschritte (Bilder 4a bis 4d);

b) Die Lage der Schalllinie für verschiedene Zeitschritte (Bild 5).

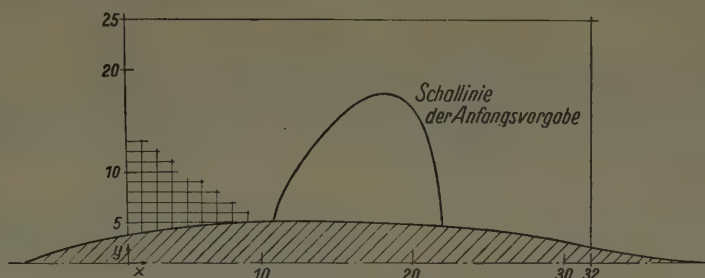


Bild 3. Die untersuchte Kontur mit Maschennetz

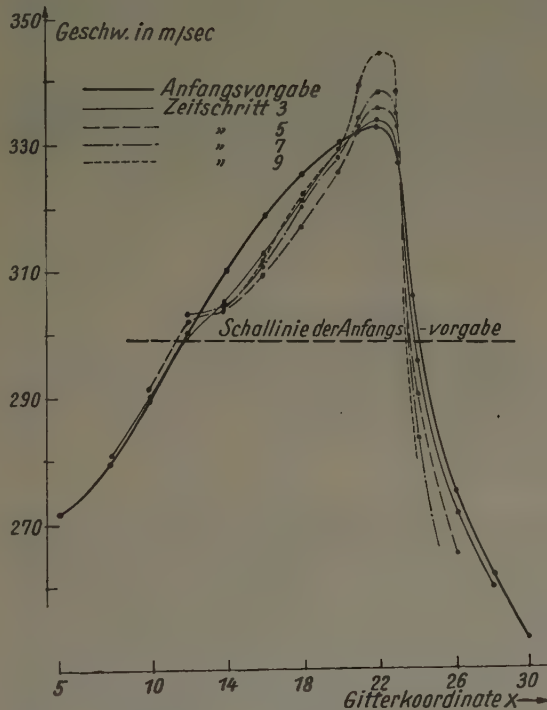
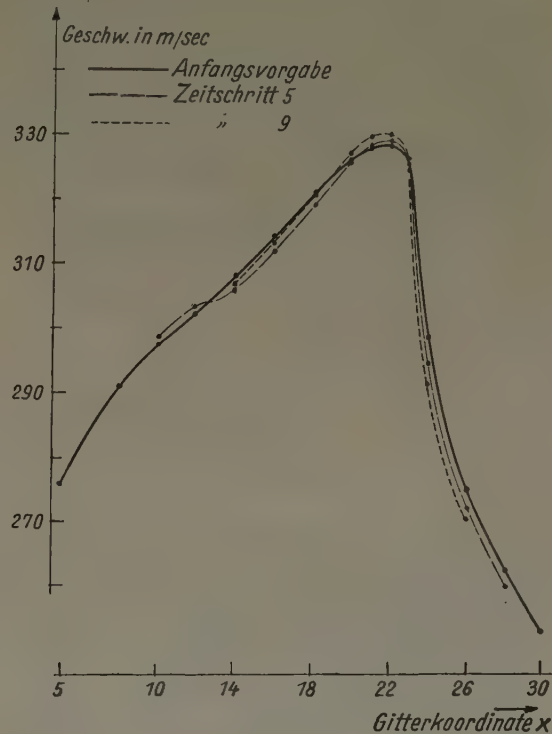
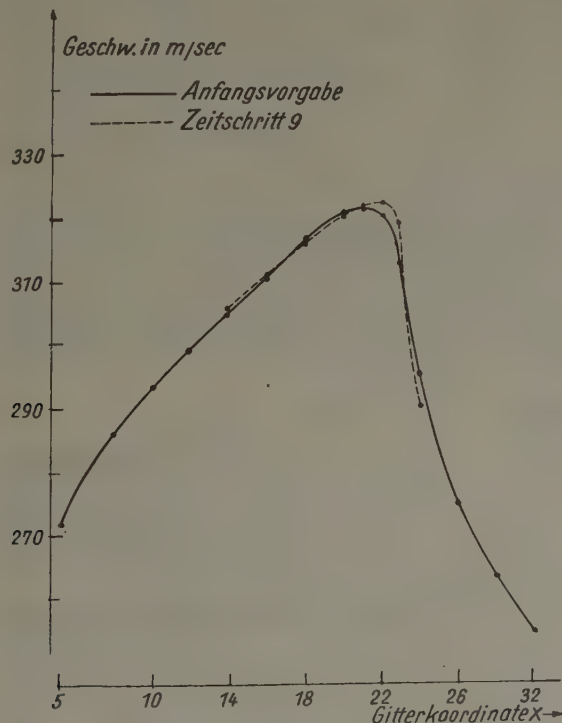
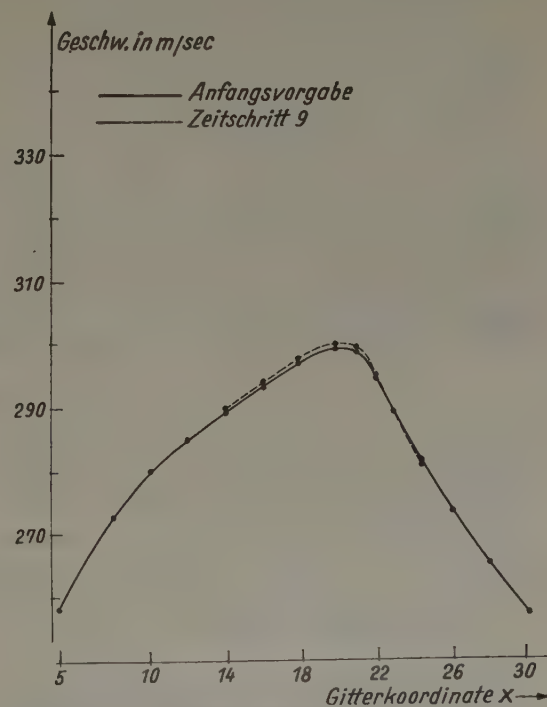


Bild 4a. Geschwindigkeitsbetrag längs der Kontur für 5 Zeitschritte


Bild 4b. Geschwindigkeitsbetrag längs der Linie $y = 7$ für 3 Zeitschritte

Bild 4c. Geschwindigkeitsbetrag längs der Linie $y = 10$ für 2 Zeitschritte

Bild 4d. Geschwindigkeitsbetrag längs der Linie $y = 20$ für 2 Zeitschritte

Zusammenfassend kann man folgendes feststellen:

1. Die Rundungsfehler bei der Berechnung der a_0 , w_0 , ϑ_0 und die Rundungs- und Verfahrensfehler bei der Berechnung der instationären Strömung waren groß genug, um im Laufe der Zeit eine erhebliche Abweichung der Strömungsdaten von der Anfangsvorgabe zu bewirken. Diese Abweichungen haben keinen statistischen Charakter, sondern zeigen einen stetigen, systematischen Verlauf.

2. Die Abweichungen sind am größten auf dem Profil, und zwar beiderseits der Schalllinie der Anfangsvorgabe. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Störungsrechnung in § 3 und mit dem Beweis von Frau MORAWETZ [1].

3. Auf dem Profil ist am Ende des Überschallgebietes ein starkes Anwachsen des Geschwindigkeitsgradienten festzustellen. Auf anderen Stromlinien tritt derselbe Effekt auf, aber um so schwächer, je weiter die Stromlinie vom Profil entfernt ist. Der Anstieg der Geschwindigkeitsgradienten am rückwärtigen Ende deutet darauf hin, daß dort die Machlinien mehr und mehr zusammenrücken und sich schließlich überschneiden werden. Das bedeutet aber, daß die Entstehung einer Stoßfront erwartet werden muß. Die Tendenz zum hierbei auftretenden unstetigen Übergang von Überschall- zu Unterschallgeschwindigkeit ist in Bild 4a bereits deutlich erkennbar.

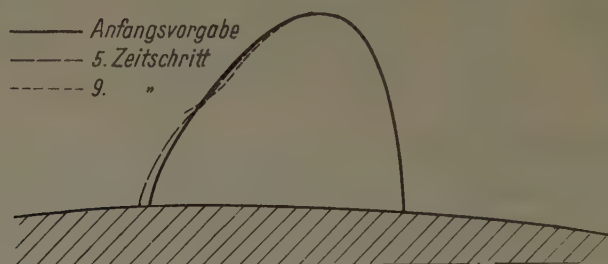


Bild 5. Lage der Schalllinie für 3 Zeitschritte

4. Die Lage der Begrenzung des Überschallgebietes bleibt am rückwärtigen Ende im Rahmen der Rechengenauigkeit konstant. Man kann also annehmen, daß die Stoßfront etwa da auftreten wird, wo die rückwärtige Schalllinie der stationären, stetigen Strömung liegt. Im vorderen Teil ändert sich die Lage der Schalllinie; das Überschallgebiet dehnt sich etwas nach vorne aus.

5. In einem Abstand vom Profil im Unterschallgebiet bleibt die Strömung nahezu ungeändert. So ist in einer Entfernung von 15 Maschenweiten vom Profil die maximale Abweichung vom Ausgangszustand 0,54%. (Nach Vollendung des 9. Zeitschrittes.) Dadurch erhält man auch einen Anhaltspunkt für die Genauigkeit der Rechnung.

Alle Ergebnisse stimmen qualitativ mit den Beobachtungen bei Windkanalversuchen und mit den Vorhersagen der Störungsrechnung in § 3 überein. Sie scheinen zu bestätigen, daß eine stoßfreie transsonische Profilströmung instabil ist und durch unvermeidliche kleine Störungen in eine stabile Strömung mit einer Stoßfront übergeht.

Natürlich besitzt das hier erreichte Ergebnis nicht das Gewicht eines mathematischen Beweises, aber es verleiht den ausgesprochenen Vermutungen doch einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit. Zur Klärung der Frage, inwieweit das Ergebnis von Verfahrensfehlern des Differenzenprozesses und von der Fortpflanzung von Rundungsfehlern beeinflusst sein kann, ist geplant, eine analoge Rechnung für reine Unterschallströmung durchzuführen. Da von dieser bekannt ist, daß sie stabil ist, müßte dies bei der Rechnung klar zum Ausdruck kommen.

Daß jedoch die aufgetretenen hauptsächlich Effekte sicher nicht durch Instabilität des Differenzenverfahrens verursacht sind, ist aus dem oben in Punkt (5) gesagten und aus den mit analytisch bekannten Lösungen gemachten Versuchen zu entnehmen.

Literatur

- [1] C. MORAWETZ, On the Non-Existenz of Continuous Transonic Flow past Profiles, Comm. on Pure and App. Math. 9 (1956), 10 (1957).
- [2] R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY, Über die partiellen Differenzengleichungen der math. Physik, Math. Ann. 100.
- [3] S. TOMOTIKA and K. TAMADA, Studies of Two-Dimensional Transonic Flow of Compressible Fluid, Quarterly of Appl. Math. 9 (1951).
- [4] R. SAUER, Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Springer-Verlag 1959.
- [5] G. BRUHNS und W. HAAOCK, Ein Charakteristikenverfahren für dreidimensionale instationäre Gasströmungen, ZAMP IXB (1958).

Manuskripteingang: 4. 2. 1961

Anschrift: Dr. W. WERNER, München 8, Bernauerstr. 14

KLEINE MITTEILUNGEN

Rayleighs Modell kleiner Störungen eines ruhenden Mediums

I. Einleitung

Für den Fall, daß wir es mit einem ruhenden Medium zu tun haben, das durch parallele Wände begrenzt wird, liegt die von RAYLEIGH [1] angegebene explizite Lösung des sich aus den Randbedingungen ergebenden Randwertproblems der Störungsdifferentialgleichung vor. Diese erweist sich als eine im Medium ruhende Wirbelkonfiguration (vgl. hierzu Bild 2 und 3).

Lord RAYLEIGH hat die Lösung des genannten Falles im einzelnen nicht näher beschrieben, was im vorliegenden Aufsatz unter Hinzufügung von Ergänzungen geschehen soll. Auf der Grundlage der erhaltenen Ergebnisse soll dann in einer folgenden Arbeit das Verhalten kleiner Störungen einer ebenen Kanalströmung bei kleinen Werten des Parameters $Re\alpha$ (Re REYNOLDSSche Zahl der Grundströmung, α positiv reelle Wellenzahl) dargestellt werden.

II. Kleine Störungen eines ruhenden Mediums zwischen parallelen Wänden

Die NAVIER-STOKESSchen Gleichungen reduzieren sich hier unter der Voraussetzung ebener Strömung auf

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (1);$$

(u, v Geschwindigkeitskomponenten in x, y -Richtung; p statischer Druck, ρ Dichte, μ Zähigkeitskoeffizient, $\nu = \mu/\rho$ kinematische Zähigkeit). Die Koordinatenachse x erstreckt sich parallel zu den Wänden im gleichen Abstand von denselben.

Bei Einführung der Stromfunktion

$$\psi(x, y) = \varphi(y) e^{i(\alpha x + \delta t)} \dots (2)$$

($\delta = \delta_1 + i\delta_2$; δ_1 ist die Kreisfrequenz der Welle, δ_2 ein Maß für die Größe der Dämpfung) erhalten wir die Störungsdifferentialgleichung

$$(\varphi'' - \alpha^2 \varphi)'' - \left(\alpha^2 + \frac{i\delta}{\nu} \right) (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) = 0 \quad (3).$$

Dabei seien die Längen $x, y, 1/\alpha, \sqrt{\nu/\delta}$ und $\sqrt{\nu t}$ bei festem ν auf die halbe Kanalbreite b bezogen.

Die der Haftbedingung entsprechenden Randwerte lauten dann

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0 \dots (4).$$

Die von RAYLEIGH [1] angegebene Lösung zerfällt mit

$$k^2 = \alpha^2 + \frac{i\delta}{\nu} \quad (k = k_1 + i k_2) \dots (5)$$

in zwei Partiallösungen:

$$I: \psi_I = \{\cos k_2 y \cos \alpha y - \cos k_2 y \cos \alpha x\} \cos \alpha x \cdot e^{-D t} \quad (6)$$

mit dem Dämpfungsfaktor

$$D = \nu (\alpha^2 + k_2^2) \dots (7)$$

und der Eigenwertgleichung

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha = -k_2 \operatorname{tg} k_2 \dots (8).$$

$$II: \psi_{II} = \left\{ \begin{aligned} &\sin \alpha \sin k_2 y - \sin k_2 \sin \alpha y \\ &\times \sin \alpha x \cdot e^{-D t} \\ &\alpha \operatorname{tg} \alpha = k_2 \operatorname{tg} k_2 \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

mit

1. Eigenwerte¹⁾

Die Wurzeln der Eigenwertgleichung (8) lassen sich zunächst grafisch ermitteln, indem man gemäß der Lesart

$$\frac{k_2}{\alpha \operatorname{tg} \alpha} = -\operatorname{ctg} k_2 \dots (10)$$

die Äste der ctg -Kurve mit den jeweiligen Geraden schneidet.

Die erhaltenen Werte kann man dann noch iterativ verbessern. Wir beschränken uns dabei ohne Verletzung der Allgemeinheit auf die positiven Wurzeln $k_2 > 0$.

Entsprechend verfährt man bei (9).

Man erhält also zu jeder Wellenzahl α ein Spektrum von Eigenwerten k_2 .

Asymptotische Formeln lassen sich leicht angeben: Transformiert man die Gleichung (8) auf

$$h = n\pi - k_2 \quad (n \text{ pos., ganz}),$$

so erhält man bei großen n und demgemäß kleinen h

$$-\operatorname{ctg} k_2 = \operatorname{ctg} h \approx \frac{1}{h}$$

und damit die Gleichung

$$\frac{1}{h} \approx \frac{n\pi - h}{\alpha \operatorname{tg} \alpha},$$

aus der folgt

Fall I:

$$k_2 \approx n\pi - \frac{1}{n\pi} \alpha \operatorname{tg} \alpha \quad \text{für große } n \quad (11).$$

Entsprechend erhält man mit der Transformation

$$h = (2n+1) \frac{\pi}{2} - k_2$$

Fall II:

$$\left. \begin{aligned} k_2 &\approx (2n+1) \frac{\pi}{2} - \frac{1}{(2n+1) \frac{\pi}{2}} \alpha \operatorname{ctg} \alpha \\ &\text{für große } n \end{aligned} \right\} \quad (12).$$

Wir geben noch die Grenzformeln für $\alpha \rightarrow 0$ und für $\alpha \rightarrow \infty$ bei beliebigem n an:

$\alpha \ll 1$ (sehr lange Wellen der Periode $2\pi/\alpha$).

Aus (10) folgt mit $\alpha \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha^2$ und unter Beachtung, daß die Wurzeln in der Nähe von $n\pi$ gelegen sind

$$I: \left. \begin{aligned} k_2 &\approx n\pi - \frac{1}{n\pi} \alpha^2, \\ \text{Dämpfungsfaktor } D &\approx \nu (n^2 \pi^2 - \alpha^2) \end{aligned} \right\} \dots (13).$$

II: Hier erhält man mit $\alpha \operatorname{ctg} \alpha \approx 1 + \frac{\alpha^2}{3}$ und dem sich für $\alpha = 0$ ergebenden Eigenwert $k_{2(0)} = \operatorname{tg} k_{2(0)}$,

$$\left. \begin{aligned} k_2 &\approx k_{2(0)} - \frac{1}{k_{2(0)}} \frac{\alpha^2}{3}, \\ D &\approx \nu \left(k_{2(0)}^2 + \frac{\alpha^2}{3} \right) \end{aligned} \right\} \dots (14).$$

Der kleinste Eigenwert $k_{2(0)}$ beträgt 4,4934.

¹⁾ Die Eigenwerte des RAYLEIGHschen Modells sind über dieses hinaus von Interesse. Vgl. z. B. D. GROHNE [2], der sie einer approximativen Darstellung der Eigenwerte allgemeiner Grundströmungen zugrundelegt.

$\alpha \gg n$ (sehr kurze Wellen der Periode $2\pi/\alpha$).

In diesem Fall folgt aus (10) mit $\alpha \Im \alpha \approx \alpha$ und bei Beachtung, daß die Wurzeln bei $(2n-1)\frac{\pi}{2}$ liegen

$$\text{I: } \left. \begin{aligned} k_2 &\approx (2n-1) \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \\ D &\approx \nu \left[(2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} + \alpha^2 \right] \end{aligned} \right\} \dots (15).$$

Analog

$$\text{II: } \left. \begin{aligned} k_2 &\approx n\pi \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \\ D &\approx \nu (n^2 \pi^2 + \alpha^2) \end{aligned} \right\} \dots (16).$$

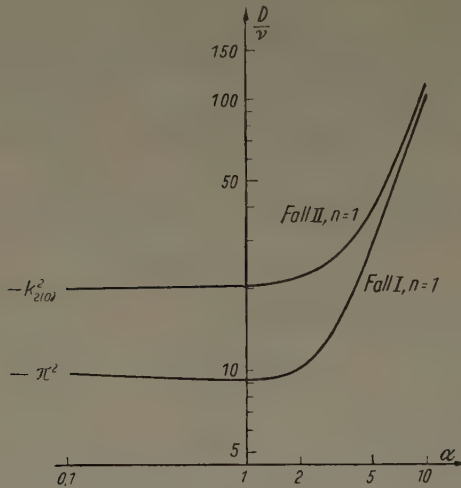


Bild 1

Von Interesse ist noch die Wirbelkonfiguration geringster Dämpfung überhaupt, die Fall I bietet (vgl. Bild 1). Die Formel (7) für den Dämpfungsfaktor liefert die Minimumbedingung

$$\alpha + k_2 \frac{dk_2}{d\alpha} = 0.$$

Eine zweite Gleichung erhält man durch Differenzieren der Eigenwertgleichung (8)

$$\Im \alpha + \frac{\alpha}{\Re \alpha^2} = - \left[\operatorname{tg} k_2 + \frac{k_2}{\cos^2 k_2} \right] \frac{dk_2}{d\alpha}.$$

Es folgt

$$(1 - \alpha \Im \alpha) \left(\frac{\Im \alpha}{\alpha} - \frac{\operatorname{tg} k_2}{k_2} \right) = 0,$$

d. h. die Bedingung

$$\alpha \Im \alpha = 1, \quad \text{die } \alpha \approx 1,200 \text{ ergibt}^2) \quad (17).$$

Nullsetzen des zweiten Faktors würde nach (8) $\alpha^2 + k_2^2 = 0$ ergeben.

2. Geschwindigkeitsverteilungen und Stromlinien

Nach (6) erhält man bei entsprechender Normierung

$$\text{I: } \left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left\{ \frac{\Im \alpha}{\Im \alpha} \frac{\sin(\alpha y)}{\sin \alpha} - \frac{\sin(k_2 y)}{\sin k_2} \right\} \cos \alpha x \cdot e^{-Dt}, \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left\{ (\Im \operatorname{tg} \alpha) \left\{ \frac{\Im \alpha}{\Im \alpha} \frac{\sin(\alpha y)}{\sin \alpha} - \frac{\cos(k_2 y)}{\cos k_2} \right\} \sin \alpha x \cdot e^{-Dt} \right\} \end{aligned} \right\} (18),$$

(9) ergibt

²⁾ Bei RAYLEIGH [1] ist irrtümlich $\alpha \approx 0$ angegeben.

II:

$$\left. \begin{aligned} u &= \left\{ \frac{\cos(k_2 y)}{\cos k_2} - \frac{\Im \alpha}{\Im \alpha} \frac{\sin(\alpha y)}{\sin \alpha} \right\} \sin \alpha x \cdot e^{-Dt}, \\ v &= -(\Im \operatorname{tg} \alpha) \left\{ \frac{\sin(k_2 y)}{\sin k_2} - \frac{\Im \alpha}{\Im \alpha} \frac{\sin(\alpha y)}{\sin \alpha} \right\} \cos \alpha x \cdot e^{-Dt} \end{aligned} \right\} (19).$$

Die (von RAYLEIGH [1] skizzierten) Stromlinienbilder — vgl. Bild 2 und 3 — zeigen Wirbelkonfigurationen als kleine Störung eines ruhenden Mediums zwischen parallelen Wänden.

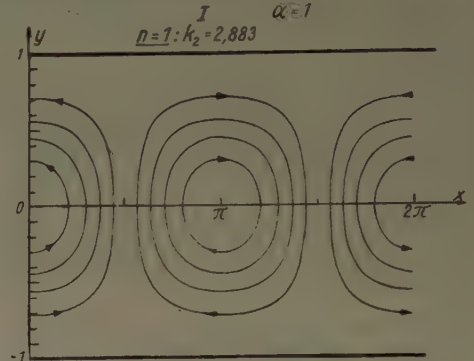


Bild 2. Stromlinienbild

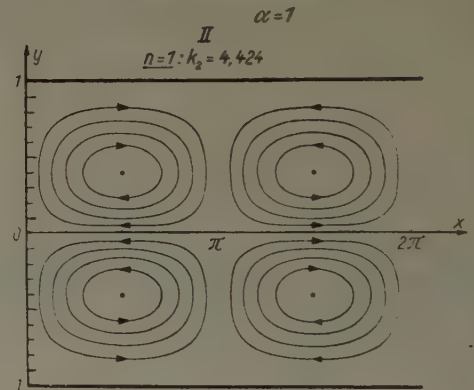


Bild 3. Stromlinienbild

Fall I liefert dabei als Grundkonfiguration ($n=1$) — vgl. als Muster Bild 2 — im Periodenintervall $2\pi/\alpha$ ein Paar entgegengesetzt drehender Wirbel mit Zentren auf der Kanalachse. Fall II zeigt als Grundkonfiguration im Periodenintervall (Bild 3) vier alternierend drehende Wirbel, in jeder Kanalhälfte jeweilig ein Paar.

Die „höheren“ Konfigurationen ($n > 1$) ergeben höhere Anzahlen von Wirbeln innerhalb einer Wellenlänge, die gemäß dem mit n wachsenden k_2 eine größere Dämpfung aufweisen.

Die in den Bildern 2 und 3 dargestellten Konfigurationen beziehen sich auf die Wellenzahl $\alpha = 1$. Für $\alpha \neq 1$ erhält man für das Periodenintervall $2\pi/\alpha$ im Schema dasselbe Bild.

Für den statischen Druck p erhält man aus (1) mit (18) und (19)

$$\left. \begin{aligned} \text{I: } \frac{p}{\rho} &= D \cos k_2 \Im \alpha \sin \alpha y \sin \alpha x \cdot e^{-Dt} \\ \text{II: } \frac{p}{\rho} &= D \sin k_2 \Im \alpha \cos \alpha y \cos \alpha x \cdot e^{-Dt} \end{aligned} \right\} (20).$$

3. Energiebilanz

Wir wollen noch kurz die lokale Energiebilanz betrachten. Bezeichnen wir die kinetische Energie der Masseneinheit mit

$$E = \frac{u^2 + v^2}{2},$$

so lautet die Energiebilanz hier

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} - \Phi \quad \dots \quad (21)$$

mit der Diffusion

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{1}{\rho} p u + \nu \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u v}{\partial y} \right) \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{1}{\rho} p v + \nu \left(\frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial u v}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

und der Dissipation

$$\Phi = \nu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (23).$$

Im räumlichen Mittel, gewonnen durch Integration über der Periodenlänge $2\pi/\alpha$, erhalten wir für die Energiebilanz im Abstand y von der Achse

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial y} - \bar{\Phi} \quad \dots \quad (24)$$

(Mittelwerte durch Überstreichen gekennzeichnet).

Für den Fall I ergibt das nach (18) bei entsprechender Normierung

$$\begin{aligned} \bar{E} = \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\sin(\alpha y)}{\sin \alpha} - \frac{\sin(k_2 y)}{\sin k_2} \right]^2 \right. \\ \left. + \text{ctg}^2 \alpha \left[\frac{\cos(\alpha y)}{\cos \alpha} - \frac{\cos(k_2 y)}{\cos k_2} \right]^2 \right\} \\ = \frac{1}{2} \{ [1]^2 + \text{ctg}^2 \alpha [2]^2 \} \quad \dots \quad (25) \end{aligned}$$

und für die Dissipation

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = \nu \left\{ 4 \alpha^2 \bar{u}^2 + \left(\frac{\text{ctg} \alpha}{\alpha} \right)^2 \right. \\ \left. \times \left[(k_2^2 - \alpha^2) \frac{\cos(k_2 y)}{\cos k_2} + 2 \alpha^2 \frac{\cos(\alpha y)}{\cos \alpha} \right]^2 \right\} \quad (26). \end{aligned}$$

Die Diffusion setzt sich zusammen aus der Druckdiffusion

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p} v}{\partial y} = -D \left[[1] \frac{\sin(\alpha y)}{\sin \alpha} + \text{ctg}^2 \alpha [2] \frac{\cos(\alpha y)}{\cos \alpha} \right] \quad (27)$$

und der Energiediffusion mit

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2} = \nu \left\{ \left(\frac{\text{ctg} \alpha}{\alpha} \right)^2 \left[(k_2^2 - \alpha^2) \frac{\cos(k_2 y)}{\cos k_2} + 2 \alpha^2 \frac{\cos(\alpha y)}{\cos \alpha} \right] \right. \\ \left. \times \left[\alpha^2 \frac{\cos(\alpha y)}{\cos \alpha} + k_2^2 \frac{\cos(k_2 y)}{\cos k_2} \right] \right. \\ \left. + [1] \left[(k_2^2 - \alpha^2) \frac{\sin(k_2 y)}{\sin k_2} + 2 \alpha^2 \frac{\sin(\alpha y)}{\sin \alpha} \right] \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 \bar{v}^2}{\partial y^2} = 2 \nu \left\{ \alpha^2 \bar{u}^2 + \text{ctg}^2 \alpha [2] \right. \\ \left. \times \left[\alpha^2 \frac{\cos(\alpha y)}{\cos \alpha} + k_2^2 \frac{\cos(k_2 y)}{\cos k_2} \right] \right\} \quad (29). \end{aligned}$$

Bild 4 zeigt die Verteilung der mittleren Energie \bar{E} der Grundkonfiguration ($n=1$) für die Wellenzahl $\alpha=1$ (vgl. Bild 2). Bild 5 enthält die Energiebilanz;

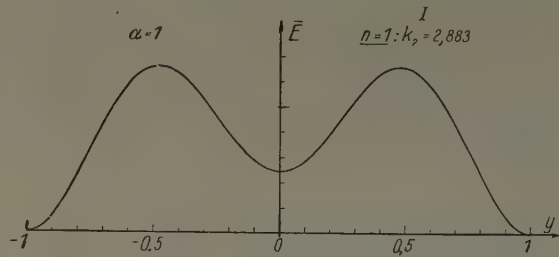


Bild 4. Verteilung der mittleren kinetischen Energie

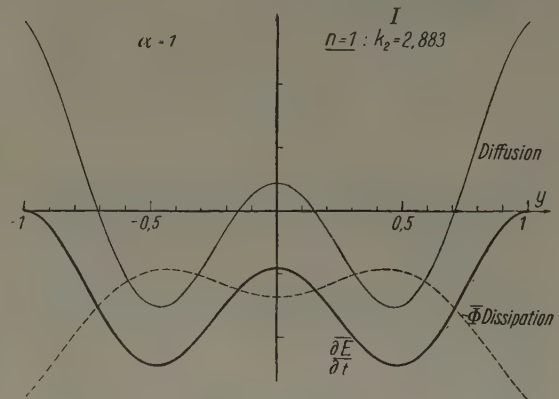


Bild 5. Energiebilanz

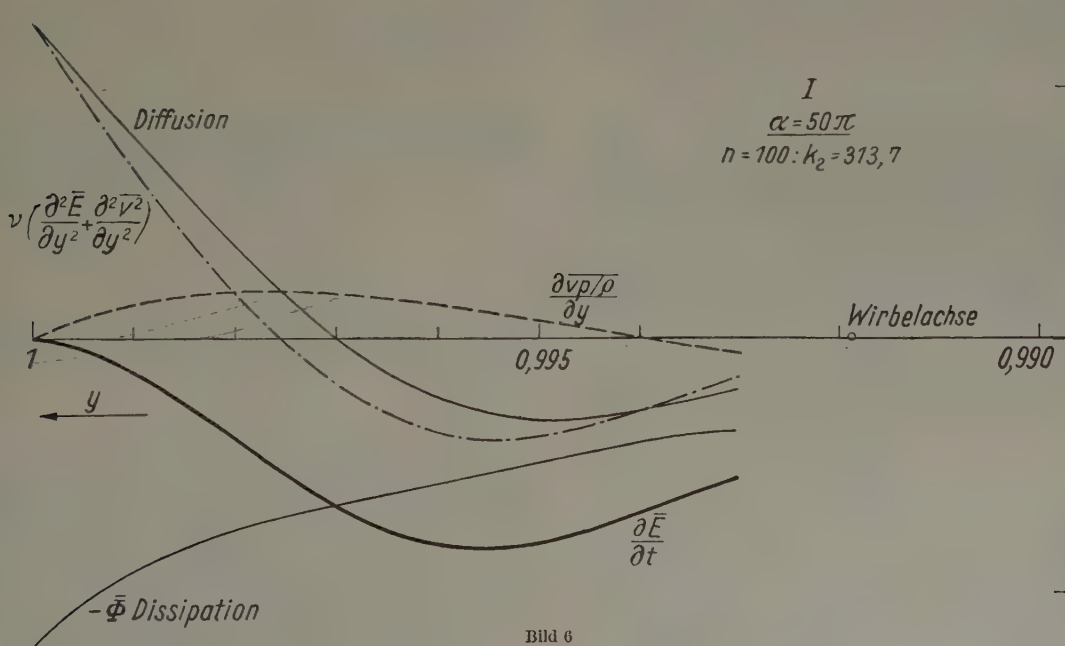


Bild 6

aus dem Vergleich mit Bild 4 ist zu ersehen, daß ein Transport kinetischer Energie von den energiereichen zu den energieärmeren Stellen, und insbesondere zur Wand, stattfindet.

Schließlich haben wir noch die Energiebilanz von Wirbeln sehr kleinen „Durchmessers“ in großer Wandnähe studiert:

$$\alpha = 50\pi, \quad n = 100 : k_2 = 313,7$$

Das liefert als wandnächste Wirbel eine Wirbelreihe mit dem horizontalen Abstand 0,02 der Achsen und dem Wandabstand 0,008.

Die in Bild 6 wiedergegebene Energiebilanz enthält auch die Aufschlüsselung der Diffusion in ihre Bestandteile. Es ist zu bemerken, daß diese qualitativ das von J. LAUFER [3] experimentell ermittelte Verhalten der Schwankungsbewegung turbulenter Strömungen in großer Wandnähe zeigen. Dagegen nimmt die Dissipation nach J. LAUFER ihren maximalen Wert nicht an der Wand, sondern in einem — wenn auch sehr geringen — Abstand von derselben an; es besteht jedoch, wie wir hier nur anmerken wollen, guter Grund zu der Annahme, daß auch die Dissipation der Schwankungsbewegung turbulenter Strömungen qualitativ das in Bild 6 angegebene Verhalten aufweist.

Literatur

- [1] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. **34** (1892), p. 59—70; Scientific Papers, Bd. III (1902), p. 575—584.
- [2] D. GROHNE, ZAMM **34** (1954), S. 344.
- [3] J. LAUFER, The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA TN 2954 (1953).

Verfasser: Prof. Dr. W. SZABLEWSKI, Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der DAdW, Berlin W 8, Mohrenstr. 39

Intrinsic Equations of Magnetogasdynamics*)

Intrinsic equations of gas-dynamics have been studied by various authors [1—6]. TRUESDELL [7] has recently written a survey article on the subject and has outlined a very simple approach to the problem. In view of such an interest in the subject we analyse, in this note, the intrinsic equations of steady magnetogasdynamics.

Let the streamlines and the lines of force have the principal triads $\underline{t}_1, \underline{n}_1, \underline{b}_1$ and $\underline{t}_2, \underline{n}_2, \underline{b}_2$ respectively. Furthermore let χ_1 and σ_1 be respectively the curvature and torsion of the streamlines while χ_2 and σ_2 the corresponding quantities for the lines of force.

The momentum equation for steady flows is

$$\rho \underline{v} \cdot \text{grad } \underline{v} = -\text{grad } p + \underline{J} \times \underline{H} \quad (1).$$

In the above equation \underline{v} and \underline{H} are the velocity and magnetic field vectors, ρ and p are the density and pressure respectively. The quantity \underline{J} is the electric current density and the factor $\underline{J} \times \underline{H}$ is LORENZ force.

If we take the scalar product of the both sides of the equation (1) with $\underline{t}_1, \underline{n}_1$ and \underline{b}_1 , respectively and use SERRE-FRENET formulae, we get

$$\rho \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{ds_1} = -\frac{dp}{ds_1} + (\underline{J} \times \underline{H})_{t_1} \quad (2),$$

$$\rho \chi_1 v^2 = -\frac{dp}{dn_1} + (\underline{J} \times \underline{H})_{n_1} \quad (3),$$

$$0 = -\frac{dp}{db_1} + (\underline{J} \times \underline{H})_{b_1} \quad (4),$$

where $v^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$; and $\frac{d}{ds_1}, \frac{d}{dn_1}$ and $\frac{d}{db_1}$ denote the directional derivatives along $\underline{t}_1, \underline{n}_1$ and \underline{b}_1 respectively.

*) This work was sponsored by the U.S. Army under contract No. DA-11-022-ORD-2059 with the University of Wisconsin.

Moreover the quantity $(\underline{J} \times \underline{H})_{t_1}$ means the component of LORENZ force along the tangent to the streamlines and the same holds for the two other expressions of that kind. From (4) we observe that the rate of change of p along the binormals to the streamlines is equal to the corresponding component of LORENZ force.

To analyse the variation of flow and field quantities along the lines of force we write the momentum equation in the form

$$\underline{H} \cdot \text{grad } \underline{H} = \text{grad } p^* + \rho \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \underline{\omega} \times \underline{v} \quad (5),$$

where $\underline{\omega}$ is the vorticity vector, $p^* = p + \frac{H^2}{2}$ is the total pressure and $H^2 = \underline{H} \cdot \underline{H}$.

If we take the scalar product of this equation with $\underline{t}_2, \underline{n}_2$ and \underline{b}_2 , we have

$$\underline{H} \cdot \frac{d\underline{H}}{ds_2} = \frac{dp^*}{ds_2} + \rho \frac{d}{ds_2} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \rho (\underline{\omega} \times \underline{v})_{t_2} \quad (6),$$

$$\chi_2 H^2 = \frac{dp^*}{dn_2} + \rho \frac{d}{dn_2} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \rho (\underline{\omega} \times \underline{v})_{n_2} \quad (7),$$

$$0 = \frac{dp^*}{db_2} + \rho \frac{d}{db_2} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \rho (\underline{\omega} \times \underline{v})_{b_2} \quad (8).$$

If the streamlines and the lines of force coincide, the relations (6—8) take a very simple form.

The values of σ_1 and σ_2 can now be readily evaluated as was done for non-conducting gases [5].

Now the equation of state [8] is

$$\nabla h = T \nabla S + \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (9),$$

where h, S and T are the specific enthalpy, specific entropy and temperature respectively.

Combining (1) and (9), we obtain

$$\rho (\underline{\omega} \times \underline{v}) = \rho T \nabla S - \rho \nabla h_0 + (\underline{J} \times \underline{H}) \quad (10),$$

where

$$\nabla h_0 = \nabla \left[h + \frac{1}{2} v^2 \right].$$

From equation (10) we can recover ω_{n_1} and ω_{b_1} , the components of the vorticity normal to the streamlines. In fact if we set

$$\underline{\omega} = \omega_{t_1} \underline{t}_1 + \omega_{n_1} \underline{n}_1 + \omega_{b_1} \underline{b}_1,$$

the equation (10) gives

$$\rho v (\omega_{n_1} \underline{b}_1 - \omega_{b_1} \underline{n}_1) = \rho T \nabla S - \rho \nabla h_0 + (\underline{J} \times \underline{H}) \quad (11).$$

Taking the scalar product of (11) with \underline{n}_1 and \underline{b}_1 , we get ω_{n_1} and ω_{b_1} . The complete evaluation of $\underline{\omega}$ may now be effected as in the non-conducting gases [5].

In order to get J_{n_2} and J_{b_2} we proceed analogously and get

$$(J_{n_2} \underline{b}_2 - J_{b_2} \underline{n}_2) = -\rho T \Delta S + \rho \Delta h_0 + \rho (\underline{\omega} \times \underline{v}) \quad (12).$$

Let \underline{N} be the common unit normal, at a point, to both the streamline and the line of force passing through that point. Taking the scalar product of (10) with \underline{N} , yields

$$\rho \underline{\omega} \cdot (\underline{v} \times \underline{N}) = \rho T \frac{ds}{dN} - \rho \frac{dh_0}{dN} + \underline{J} \cdot (\underline{H} \times \underline{N}) \quad (13).$$

If the streamlines and the lines of force are normal trajectories then $\underline{v} \times \underline{N} = v \underline{t}_2$, and $\underline{H} \times \underline{N} = -H \underline{t}_1$ and the relation (13) becomes

$$\rho v \omega_{t_2} = \rho T \frac{ds}{dN} - \rho \frac{dh_0}{dN} - H J_{t_1} \quad (14).$$

Finally we attend to the field equation [8]

$$\underline{v} \cdot \text{grad } \underline{H} - \underline{H} \cdot \text{grad } \underline{v} + \underline{H} \text{div } \underline{v} = 0 \quad (15).$$

We shall take the scalar product of (15) with n_1 and n_2 only. The scalar product with the other principal directions of the streamlines and the lines of force can be disposed of similarly.

Now

$$\underline{v} \cdot \text{grad } H \cdot n_1 = v \frac{dH_{n_1}}{ds_1} + v H_{t_1} \chi_1 - v H_{b_1} \sigma_1 \quad (16).$$

While

$$\underline{H} \cdot \text{grad } \underline{v} \cdot n_1 = v H_{t_1} \chi_1 + v H_{n_1} \frac{dt_1}{dn_1} \cdot n_1 + v H_{b_1} \frac{dt_1}{db_1} \cdot n_1 \quad (17).$$

By taking the scalar product of (15) with n_1 , and using (16) and (17) we readily obtain

$$v H_{b_1} \sigma_1 = v \frac{dH_{n_1}}{ds_1} - v H_{n_1} \frac{dt_1}{dn_1} \cdot n_1 - v H_{b_1} \frac{dt_1}{db_1} \cdot n_1 + H_{n_1} \text{div } \underline{v} \quad (18).$$

Similarly, the scalar product of (15) with n_2 yields

$$v_{b_2} \sigma_2 = \frac{dv_{n_2}}{ds_2} - v_{n_2} \frac{dt_2}{dn_2} \cdot n_2 - v_{b_2} \frac{dt_2}{db_2} \cdot n_2 \quad (19).$$

References

- [1] S. S. BYUSHGENS, *Isv. Acad. Nauk, Math. Series*, **12** (1948), pp. 481—512.
- [2] L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics*, New York 1950, The Macmillan Co.
- [3] T. Y. THOMAS, *Comm. pure appl. math.* **3** (1952), pp. 103—132.
- [4] N. COBURN, *Michigan Math. J.* **1** (1952), pp. 113—130.
- [5] R. P. KANWAL, *J. Math. Mech.* **6** (1957), pp. 521—628.
- [6] W. T. DUNCAN, *Aero. Q.* **8** (1957), pp. 207—214.
- [7] C. TRUESDELL, *ZAMM* **40** (1960), S. 9—14.
- [8] T. G. COWLING, *Magnetohydrodynamics*, New York 1957, Interscience Publishers.

Verfasser: R. P. KANWAL, Ass. Prof., Department of Mathematics, Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania. U.S.A.

Zur nomographischen Darstellbarkeit gewisser Funktionensysteme

Vor kurzem wurde eingehend über die Darstellbarkeit von Systemen von zwei Funktionen zweier reeller Veränderlichen durch Fluchtliniennomogramme [1] und die Anwendung auf die nomographische Darstellung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen berichtet [2], [3], [4]. Diese Ausführungen sollen hier noch nach einigen Richtungen ergänzt werden.

1. Außer den in [2], [3], [4] behandelten Logarithmen der elliptischen Funktionen sind auch die Logarithmen der logarithmischen Ableitungen der elliptischen Funktionen, nämlich

$$w = \ln \frac{cn(z, k^2) \frac{dn(z, k^2)}{dz}}{sn(z, k^2)} \quad \dots \quad (1),$$

$$w = \ln \frac{-sn(z, k^2) \frac{dn(z, k^2)}{dz}}{cn(z, k^2)} \quad \dots \quad (2),$$

$$w = \ln \frac{-k^2 sn(z, k^2) \frac{cn(z, k^2)}{dz}}{dn(z, k^2)} \quad \dots \quad (3),$$

$$w = \ln \frac{\wp'(z; e_1, e_2, e_3)}{\wp(z; e_1, e_2, e_3) - e_2} \quad \dots \quad (4),$$

durch Fluchtliniennomogramme darstellbar. Es ist jedoch nicht erforderlich, hierfür gesonderte Nomogramme zu konstruieren. Vielmehr lassen sich nach dem in [2], 1 angegebenen Verfahren jeweils zwei Modul- und Argumenttransformationen (vgl. [5], III, 1) ermitteln, durch die jeder der Funktionen (1) bis (4) eine mit ihr äquivalente Funktion zugeordnet werden kann, deren Nomogramm bereits in [2], [3] oder [4] vorliegt.

Es sei eine dieser beiden Transformationen für die Funktion (4) angegeben, wenn als die mit ihr äquivalente Funktion

$$w_{am} = u_{am} + i v_{am} = am(z_{am}, k_{am}^2) \quad \dots \quad (5)$$

gewählt wird. Dann gelten im Falle reeller e_1, e_2, e_3 mit $e_1 > e_2 > e_3$ und $k_{\wp}^2 = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$ die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} k_{am}^2 &= 1/k_{\wp}^2, \\ x_{am} &= 2 \left[\sqrt{e_2 - e_3} x - k_{\wp} K(k_{\wp}^2) \right], \\ y_{am} &= 2 \left[\sqrt{e_2 - e_3} y - k_{\wp} \frac{K'(k_{\wp}^2)}{2} \right], \\ u_{am} &= \frac{\pi}{2} - v, \\ v_{am} &= u - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(e_1 - e_3) \end{aligned} \right\} \quad (6).$$

Die zu verschiedenen reellen Wertetripeln e_1, e_2, e_3 mit $\Delta_1^2 = [(e_2 - e_1)(e_3 - e_3)]^2 = 1$ gehörigen Funktionen (4) finden ihre Darstellung auf den Kegelschnitten eines Kegelschnittbüschels mit vier reellen Grundpunkten (für $\Delta_1^2 \neq 1$ vgl. [4], 3). Ist dagegen e_2 reell, e_1, e_3 konjugiert komplex, so erhält man ein Kegelschnittbüschel mit zwei reellen Grundpunkten. (Vgl. hierzu [2], 2 und [4], 3.)

2. Auch die Integrale der JACOBISCHEN elliptischen Funktionen sind durch Fluchtliniennomogramme darstellbar (s. [1], Tabelle 1, Fall 5), dagegen nicht das Integral der WEIERSTRASSSchen \wp -Funktion (WEIERSTRASSSche ζ -Funktion).

Es sei hier noch eine der beiden Modul- und Argumenttransformationen für

$$\int sn(z, k^2) dz \quad \dots \quad (7)$$

und

$$\int cn(z, k^2) dz \quad \dots \quad (8)$$

angegeben, wenn als mit (7) bzw. (8) äquivalente Funktion wieder (5) gewählt wird. Für (7) gilt im Falle $0 < k^2 < 1$:

$$\left. \begin{aligned} k_{am}^2 &= k'^2, \\ x_{am} &= y - K'(k^2), & y_{am} &= -x + K(k^2), \\ u_{am} &= v - \frac{\pi}{2k}, & v_{am} &= -u - \frac{\ln k'}{k} \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

Für (8) gilt im Falle $0 < k^2 < 1$:

$$\left. \begin{aligned} k_{am}^2 &= \frac{1}{k^2}, \\ x_{am} &= k \cdot x, & y_{am} &= k \cdot y, \\ u_{am} &= k \cdot u, & v_{am} &= k \cdot v \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (10).$$

Die zu verschiedenen Werten von k^2 gehörigen Funktionen (7) bzw. (8) finden ihre Darstellung auf den Kegelschnitten eines Kegelschnittbüschels mit vier reellen Grundpunkten, und zwar erhält man im Falle (7) Nomogramme vom Typus der Bilder 1, 5, 9, 13, im Falle (8) vom Typus der Bilder 15 und 16 in [2], [3]. Die vollständigen Transformationstabellen zu 1 und 2 und Anwendungen finden sich in [5].

3. Die in [1] entwickelte Theorie läßt sich u. a. auch anwenden, um die Werte gewisser Paare konjugierter Lösungen der eindimensionalen Wellengleichung mit Hilfe eines Fluchtliniennomogramms zu ermitteln.

Als Beispiel für ein solches nomographierbares Lösungssystem sei hier angegeben:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, u, v) &= \sin u \cos v [dn^2(x, k^2) sn^2(y, k^2) + cn^2(y, k^2)] \\ &\quad - sn(x, k^2) cn(y, k^2) dn(y, k^2) = 0, \\ G(x, y, u, v) &= \cos u \sin v [dn^2(x, k^2) sn^2(y, k^2) + cn^2(y, k^2)] \\ &\quad - cn(x, k^2) dn(x, k^2) sn(y, k^2) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (11).$$

k^2 beliebig reell

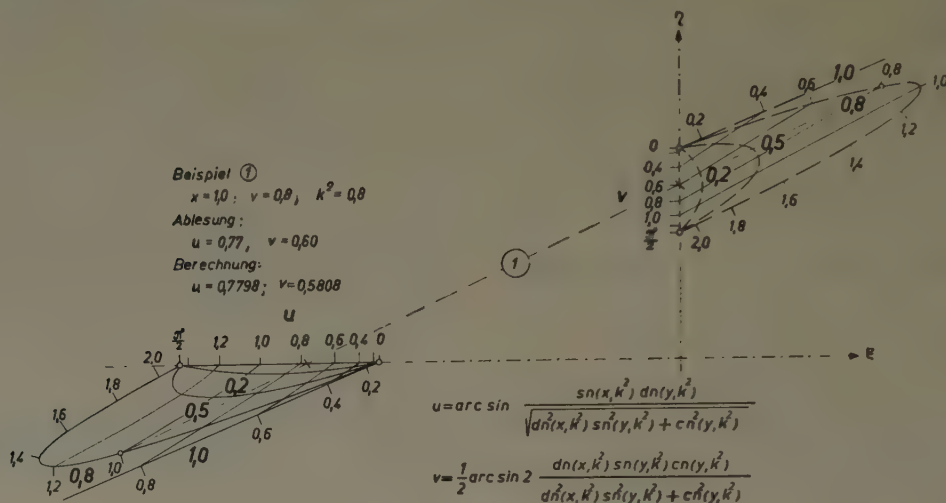
Das Bild unten zeigt eine Nomogrammform für das System (11).

Die wesentlichen Typen nomographierbarer Systeme von konjugierten Lösungen der eindimensionalen Wellengleichung finden sich mit Beispielen zugehöriger Nomogramme in [5].

Verfasser: Prof. Dr. F. REUTTER, Stud. Ass. E. HAUPT, Institut für Geometrie und praktische Mathematik, Techn. Hochschule Aachen

Literatur

- [1] F. REUTTER, Theorie der Fluchtliniennomogramme für Systeme von zwei Funktionen zweier reeller Veränderlichen, ZAMM 40 (1960), S. 75—93.
- [2] F. REUTTER, Geometrische Untersuchungen über Nomogramme für elliptische Integrale erster Gattung und JACOBIsche elliptische Funktionen. Teil I, ZAMM 40 (1960), S. 433—448.
- [3] F. REUTTER, dgl. Teil II, ZAMM 40 (1960), S. 529—541.
- [4] F. REUTTER, Eine geometrische Darstellung der WEIERSTRASS'schen \wp -Funktion, ZAMM 41 (1961), S. 54—65.
- [5] F. REUTTER, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 1003, 1961.



Über die geometrische Herleitung einer Resolvente der biquadratischen Gleichung

Es ist bekannt, daß sich jede biquadratische Gleichung auf die reduzierte Form

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \dots (1)$$

bringen läßt und dann über die Lösungen einer kubischen Gleichung, der sogenannten Resolvente der Gleichung (1), aufgelöst werden kann. Meistens setzt man die Lösung von (1) in der Form

$$x = p + q + r$$

an und erhält dann aus den Wurzeln z_1, z_2, z_3 der kubischen Gleichung

$$z^3 + \frac{A}{2}z^2 + \frac{A^2 - 4C}{16}z - \frac{B^2}{64} = 0 \quad \dots (2)$$

die Beziehungen

$$p = \pm \sqrt[3]{z_1}, \quad q = \pm \sqrt[3]{z_2}, \quad r = \pm \sqrt[3]{z_3},$$

wobei die Vorzeichen der Bedingung

$$\operatorname{sgn}(pqr) = \operatorname{sgn}(-B)$$

genügen müssen¹⁾.

Unser Ziel ist die Herleitung der Gleichung (2) mittels geometrischer Überlegungen.

Wir gehen davon aus, daß die Auflösung der Gleichung (1) mit reellen Koeffizienten im Falle $B \neq 0$ auf die Bestimmung der Schnittpunkte zweier kongruenter Parabeln mit zueinander senkrechten Achsen hinausläuft. Sind nämlich

$$x^2 = ay + b \quad \dots (3)$$

und

$$y^2 = ax + c \quad \dots (4)$$

die Gleichungen dieser Parabeln, so ergibt sich durch Elimination von y die Gleichung

$$x^4 - 2bx^2 - a^3x + b^2 - a^2c = 0.$$

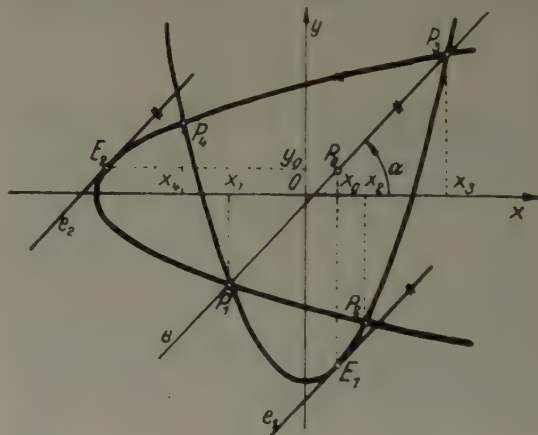
Diese stimmt mit (1) überein, wenn

$$a = -\sqrt[3]{B}, \quad b = -\frac{1}{2}A, \quad c = \frac{A^2 - 4C}{4\sqrt[3]{B^2}} \quad (B \neq 0)$$

gewählt wird.

¹⁾ Vgl. O. PERRON, Algebra, Bd. II (Theorie der algebraischen Gleichungen), 3. Aufl., S. 74—91, Berlin 1951.

Sind wenigstens zwei reelle Schnittpunkte vorhanden, so bestimmen diese eine gemeinsame Parabelsehne. (Im Bild sind vier reelle Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 vorhanden, und es ist die gemeinsame Sehne



P_1P_3 herausgegriffen worden.) Sind x_0, y_0 die Koordinaten des Mittelpunktes dieser Sehne, so sind auf Grund bekannter Parabeleigenschaften die Tangente e_1 an die Parabel (3) im Punkte $E_1(x = x_0, y = (x_0^2 - b)/a)$ und die Tangente e_2 an die Parabel (4) im Punkte $E_2(x = (y_0^2 - c)/a, y = y_0)$ parallel. Daher gilt für ihre Steigungen

$$\frac{2x_0}{a} = \frac{a}{2y_0}.$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen x_0 und y_0 gegeben:

$$y_0 = \frac{a^2}{4x_0} \quad \dots (6),$$

und die Gleichung der gemeinsamen Sekante lautet

$$y - \frac{a^2}{4x_0} = \frac{2x_0}{a}(x - x_0) \quad \dots (7).$$

Man kann nun umgekehrt, ohne die Parabeln zu zeichnen, von einem zunächst noch unbestimmten Wert x_0 und dem zugehörigen Punkt $P_0(x_0, y_0 = a^2/4x_0)$ ausgehen. Dann sind die Tangente an die Parabel (3) an der Stelle $x = x_0$ und die Tangente an die Parabel (4) an der Stelle $y = y_0$ parallel zueinander, und die dazu parallele Gerade g_0 durch P_0 hat die Gleichung (7). Man kann jetzt die Forderung stellen, daß x_0 so zu wählen ist, daß g_0 durch zwei Schnittpunkte der beiden Parabeln hindurchgeht, d. h. beide Parabeln an denselben Stellen x schneidet. Setzt man demgemäß (7) in (3) bzw. (4) ein, so müssen für diesen Fall die beiden entstehenden quadratischen Gleichungen für x , nämlich

$$x^2 - 2x_0x + 2x_0^2 - \frac{a^6}{4x_0} - b = 0 \quad (8)$$

und

$$x^2 - 2x_0x + \frac{a^6}{64x_0^4} - \frac{a^2c}{4x_0^2} - \frac{a^3}{4x_0} + x_0^2 = 0 \quad (9)$$

gemeinsame Wurzeln haben. Dazu müssen die von x freien Glieder übereinstimmen, und dies führt für x_0 zu der Gleichung

$$x_0^6 - bx_0^4 + \frac{a^2c}{4}x_0^2 - \frac{a^6}{64} = 0 \quad (10).$$

Setzt man $x_0^2 = z$ und berücksichtigt die Beziehungen (5) zwischen a, b, c und A, B, C , so ist (10) genau die kubische Resolvente (2).

Formal läßt sich der ganze Prozeß auch dann durchführen, wenn die Parabeln nur einen oder gar keinen reellen Schnittpunkt haben, und sogar für komplexe Koeffizienten der biquadratischen Gleichung. Liegt wie im Bild der Fall vier reeller Lösungen vor, so gibt es sechs gemeinsame Sehnen der beiden Parabeln entsprechend den sechs reellen Lösungen x_0 der Gleichung (10).

Verfasser: E. VINCZE, N. M. Egyetem, Matematikai Tanszéke, Miskolc-Egyetemváros, Ungarn

Die numerischen Werte einer B_2 -Folge der Additiven Zahlentheorie

Allgemeines

In der additiven Zahlentheorie sind von verschiedenen Autoren (u. a. SIDON [3], ERDÖS u. TURÁN [2]) die sogenannten B_2 -Folgen untersucht worden. Eine Folge $\mathfrak{B} = \{a, b, \dots\}$ natürlicher Zahlen nennt man B_2 -Folge, wenn es für jede natürliche Zahl n höchstens eine Darstellung der Form

$$n = a + b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathfrak{B} \quad a \leq b \quad (1)$$

gibt. Ein Beispiel ist die Folge $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\}$. Mit $B(m)$ werde bezeichnet die Anzahl aller $b \in \mathfrak{B}$ mit $0 < b \leq m$. Von Interesse sind solche unendlichen B_2 -Folgen, die in dem Sinne möglichst viele Elemente enthalten, daß

$$k(\mathfrak{B}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{B(m)}{\sqrt{m}}$$

möglichst groß ausfällt. Bisher ist die Existenz von B_2 -Folgen mit $k(\mathfrak{B}) \geq 1/\sqrt{2}$ gesichert.

Die explizite numerische Berechnung von B_2 -Folgen erfordert einigen Aufwand. In dieser Mitteilung werden die Elemente einer B_2 -Folge wiedergegeben, deren Konstruktionsprinzip auf MIAN und CHOWLA [1] zurückgeht.

Konstruktionsprinzip

Man setze $b_1 = 1$ und wähle, wenn b_1, \dots, b_ν bereits festgelegt sind, für $b_{\nu+1}$ die kleinste natürliche Zahl, welche von allen Zahlen $b_r + b_s - b_t$ mit $1 \leq r, s, t \leq \nu$ verschieden ist. Die so konstruierte Folge beginnt:

$$1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, \dots \quad (2).$$

MIAN und CHOWLA vermuteten, daß

$$b_\nu \leq \nu^2 \quad \text{für alle} \quad \nu \geq 1 \quad (3)$$

gilt. Aus (3) würde $k(\mathfrak{B}) \geq 1$ folgen.

Numerische Ergebnisse

Die Berechnung der Folge (2) wurde auf der elektronischen Rechenanlage ER 56¹⁾ für alle $b_\nu \leq 250\,000$ durchgeführt. Der Speicherbedarf und Rechenaufwand ist dabei deshalb groß, weil für die Berechnung eines einzelnen Elementes b_ν die Differenzen $b_s - b_r$ aller Paare b_r, b_s mit $b_r < b_s < b_\nu$ herangezogen werden müssen. In der untenstehenden Tabelle sind alle $b_\nu \leq 250\,000$ der Größe nach wiedergegeben. Man entnimmt dieser Tabelle, daß entgegen Vermutung (3) bereits

$$b_{17} = 290 > 17^2 = 289$$

gilt und auch für alle berechneten $b_\nu > 290$ Ungleichung (3) verletzt ist.

B_2 -Folge nach MIAN und CHOWLA

000 001	000 002	000 004	000 008	000 013
000 021	000 031	000 045	000 066	000 081
000 097	000 123	000 148	000 182	000 204
000 252	000 290	000 361	000 401	000 475
000 565	000 593	000 662	000 775	000 822
000 916	000 970	001 016	001 159	001 312
001 395	001 523	001 572	001 821	001 896
002 029	002 254	002 379	002 510	002 780
002 925	003 155	003 354	003 591	003 797
003 998	004 297	004 433	004 779	004 851
005 123	005 243	005 298	005 751	005 998
006 374	006 801	006 925	007 460	007 547
007 789	008 220	008 503	008 730	008 942
009 882	010 200	010 587	010 898	011 289
011 614	011 876	012 034	012 931	013 394
014 047	014 534	014 901	015 166	015 688
015 972	016 619	017 355	017 932	018 845
019 071	019 631	019 670	020 722	021 948
022 526	023 291	023 564	023 881	024 596
024 768	025 631	026 037	026 255	027 219
028 566	029 775	030 094	031 311	032 217
032 620	032 912	034 277	035 330	035 469
036 204	038 647	039 160	039 223	039 943
040 800	041 882	042 549	043 394	044 879
045 907	047 421	047 512	048 297	050 064
050 902	052 703	052 764	054 674	055 307
056 663	058 425	059 028	060 576	060 995
062 205	063 129	064 488	066 999	067 189
068 512	068 984	070 170	071 365	075 618
076 793	077 571	079 047	080 309	083 179
084 345	087 016	087 874	088 566	089 607
091 718	092 887	093 839	095 103	097 974
099 583	101 337	102 040	103 626	104 554
106 947	107 205	108 622	111 837	112 800
113 949	114 642	116 291	117 177	121 238
125 492	126 637	129 170	130 986	131 697
134 414	134 699	136 635	139 964	143 294
144 874	146 605	147 499	148 593	150 146
152 318	152 834	156 836	157 150	160 782
163 010	163 502	164 868	170 984	172 922
174 171	177 853	180 249	182 071	185 403
188 314	190 726	190 894	193 477	196 832
199 646	201 472	202 699	205 325	206 811
208 748	214 435	217 182	218 011	225 350
226 682	229 163	231 694	233 570	234 619
235 152	238 727	240 814	247 822	

Literatur

- [1] S. CHOWLA und A. M. MIAN, On the B_2 -sequences of Sidon, Proc. Nat. Acad. Sci. India, Sect. A 14 (1944), S. 3—4.
- [2] P. ERDÖS und P. TURÁN, On a problem of Sidon in additive number theory, and some related problems, Journ. London Math. Soc. 16 (1941), S. 212—215.
- [3] S. SIDON, Ein Satz über Fouriersche Reihen mit Lücken, Math. Zeitschrift 34 (1932), S. 481—484.

Verfasser: Dr. F. KRÜCKEBERG, Bonn-Ippendorf, Buchholzstr. 16

¹⁾ Die Anlage ER 56 ist im Institut für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn installiert.

BUCHBESPRECHUNGEN

H. Schlichting und E. Truckenbrodt, Aerodynamik des Flugzeuges. Band 2. XVI + 485 S. m. 389 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 61,50. .

Mit dem im August 1960 erschienenen zweiten Band der „Aerodynamik des Flugzeuges“ liegt nun ein umfassendes deutsches Lehrbuch dieses Wissensgebietes vor. Während der 1959 erschienene erste Band die strömungsmechanischen Grundlagen und die Profiltheorie behandelt, befaßt sich der zweite Band in 6 Kapiteln (VII bis XII) mit der Aerodynamik des endlichen Tragflügels, des Rumpfes und der Leitwerke.

Die Theorien und Verfahren zur Berechnung der am endlichen Flügel wirkenden Kräfte und der wichtigsten flugmechanischen Beiwerte werden in Kapitel VII und VIII behandelt. Bei der Berücksichtigung des Einflusses der Kompressibilität erweist sich hier, wie auch in den weiteren Kapiteln, die zuerst von GÖTHERT vorgenommene Erweiterung der PRANDTL-GLAUERTschen Regel auf die räumliche Unterschallströmung von großem praktischen Wert. Nach einer übersichtlichen Darstellung des Tragflügels in der Überschallströmung folgt abschließend eine Einführung von Dr.-Ing. K. GERSTEN in das Gebiet der Hyperschallströmung.

Die beiden folgenden Kapitel (IX und X) sind der Aerodynamik des Rumpfes und der Flügel-Rumpf-Anordnung bei inkompressibler und kompressibler Strömung gewidmet. Die theoretisch nicht einfach zu erfassende Wechselwirkung zwischen Flügel und Rumpf wird für den Fall der gleichzeitigen Anstellung des Rumpfes mit dem Flügel eingehend behandelt.

Kapitel XI befaßt sich mit der Aerodynamik der Leitwerke sowie ihrer Beeinflussung durch Flügel und Rumpf bei inkompressibler Strömung, für das Höhenleitwerk auch bei kompressibler Strömung. Den Abschluß des Buches bildet ein Kapitel (XII) über die Aerodynamik der Ruder und Klappen. In einem Anhang sind aerodynamisch wichtige geometrische Kenngrößen ausgeführter Flugzeuge zusammengestellt.

Mit der Herausgabe dieses 2. Bandes haben die beiden bekannten Verfasser ein Lehrbuch geschaffen, das eine einheitliche und umfassende Darstellung der Flugzeugaerodynamik bietet, eines Gebietes, das in den beiden letzten Jahrzehnten an Umfang und Bedeutung außerordentlich zugenommen hat. Das Buch wendet sich in erster Linie an den in der Luftfahrtforschung und Luftfahrtindustrie tätigen Wissenschaftler und Ingenieur und stellt für diesen durch die klare, dem technischen Denken angepaßte Darstellungsweise, die zahlreichen zur Überprüfung der einzelnen Theorien angeführten experimentellen Ergebnisse, die Berechnungsbeispiele und die umfangreichen Literaturzusammenstellungen ein außerordentlich wertvolles und lang entbehrtes Hilfsmittel dar.

Dresden

G. BACKHAUS

D. Laugwitz, Differentialgeometrie. 183 S. m. 44 Abb. Stuttgart 1960. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. DM 24,60.

Das Bestreben des Verf. ist, einen systematischen Überblick über die Differentialgeometrie zu geben, wie sie in einer zweisemestrigen Vorlesung für mittlere Semester dargeboten wird, und dabei doch die speziellen spezifischen Einzelergebnisse nicht zu kurz kommen zu lassen. Er bringt zunächst die Kurventheorie mit FRENETSchen Formeln, Fundamentalsatz und vollständigem Invariantensystem. In der

Flächentheorie verwendet er von Anfang an Tensoren; von alternierenden Differentialformen macht er keinen Gebrauch. Er bringt zuerst die innere Flächentheorie und erst dann die Krümmungstheorie. Es folgt eine systematische Darstellung der Tensorrechnung mit ihrer Anwendung auf den affinen Zusammenhang und die RIEMANNsche Geometrie. Im 4. Kap. gibt er dann Anwendungen der RIEMANNschen Geometrie, die Beziehungen der Flächen konstanter Krümmung zu den nichteuklidischen Ebenen. In der Theorie der Abbildungen arbeitet er sehr deutlich die verschiedenen Forderungen heraus, die man an eine Abbildung stellen möchte und zeigt ihre Unvereinbarkeit. Er knüpft die Beziehungen zur analytischen Dynamik in der Differentialgeometrie des Konfigurationsraumes. Dann behandelt er die allgemeinsten metrischen Räume und die Eigenschaften, die die RIEMANNschen Räume unter ihnen auszeichnen. Besonders dieses 4. Kap. scheint mir viele Dinge und Zusammenhänge zu bieten, die man sonst in den Lehrbüchern der Differentialgeometrie nicht findet. Im 5. Kap. stellt er eine Reihe von Sätzen aus der Differentialgeometrie im Großen zusammen. In einem Anhang gibt er einen Überblick über die Geschichte der Differentialgeometrie. — Zu jedem Kapitel gibt er reichlich Aufgaben, die den Leser auch an viele einzelne Sätze der älteren Differentialgeometrie heranzuführen. 44 übersichtliche Figuren erleichtern das Verständnis.

Das Buch scheint in sachlicher und didaktischer Hinsicht als Lehrbuch für Studenten der Mathematik und theoretischen Physik hervorragend geeignet zu sein. Weil das Buch im besonderen Maße die Denkweise und Erfordernisse der theoretischen Physik berücksichtigt, ist einem Physiker, der sich das für ihn notwendige differentialgeometrische Handwerkszeug erarbeiten will, dieses Buch vor allen anderen zu empfehlen. Meinen Vorlesungen der Differentialgeometrie für Mathematiker lege ich im weiten Umfang dieses Buch zugrunde. —

Halle/Saale

O.-H. KELLER

H. Parkus, Mechanik der festen Körper. VIII + 264 S. m. 191 Abb. Wien 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 29,—.

„Die Theorien und Methoden der Mechanik sind eben jetzt in rascher Entwicklung begriffen. Neue Anwendungsgebiete werden erschlossen... aber viel alter Ballast mitgeschleppt“, schreibt der Verfasser im Vorwort. Er geht daher „vom traditionellen Aufbau ab“ und will dadurch, daß er „alle Sätze sogleich für den beliebig verformbaren bewegten Körper herleitet“, die Sonderfälle schneller finden, wobei zugleich die Grenzen deutlich werden, bis zu denen die Sätze gelten. Nun, ganz so umstürzlerisch ist das Buch — glücklicherweise — nicht: ein Lehrbuch für Anfänger kann ja, ohne die speziellen Annahmen sehr bald einzuführen, gar nicht durchkommen. Zwar ist die übliche Dreiteilung: Statik, Elastostatik, Kinetik (an die sich SZABOS bekannte „Einführung“ hält) gefallen — aber die meisten Kapitel handeln eben doch von einem der Untergebiete: Kinematik (I), Statik (II, III), Elastostatik (IX—XVIII), Kinetik (IV—VI, XXI), und nur die Kapitel VII, VIII, XX befassen sich mit Methoden (D'ALEMBERT, LAGRANGE, RITZ), die die allgemeine Mechanik betreffen. Viel wichtiger ist, daß das Buch gut und klar geschrieben ist und daher der neuen Stoffanordnung echte Vorteile abgewinnt.

Besonders auffällig ist die Eindämmung der Statik: Daß den Studierenden des „normalen“ Ersten Semesters dieses Kapitel besonders schwer fällt, spricht

dafür; daß der Kraftbegriff nun einmal Zeit braucht, dagegen. Die LAGRANGESchen Gleichungen, das RITZsche Verfahren, ebenso die Theorie der Schalen und der Stabilität des elastischen Gleichgewichts aber sollte man der höheren Mechanik überlassen: la méthode, wie es DESCARTES genannt hat, ist der „Stoff“ der ersten Semester — die Mathematik, die solche Kapitel erfordern, verdunkeln das mechanisch Wesentliche für den Anfänger zu sehr.

Trotz der Bedenken, die wir gegen des Verfassers Aussicht, die ersten Semester anzusprechen, haben, wüßten wir kein besseres Buch zu nennen, wenn es als Nachschlage- und Lern-Buch für mittlere Semester dienen soll. Und daß der Kinematik, die im deutschen Schrifttum außerhalb Österreichs immer zu kurz kommt, ein besonderes Kapitel gewidmet ist, gibt ihm einen zusätzlichen Reiz.

Darmstadt

K. MARGUERRE

J. Tschauener, Einführung in die Theorie der Abtastsysteme. 185 S. m. 81 Abb. u. 5 Oszillogrammen. München 1960. Verlag R. Oldenbourg. Preis brosch. DM 32,—.

Die bisherigen Buch-Veröffentlichungen über Abtastsysteme benutzen Differenzgleichungen oder die diskrete LAPLACE-Transformation, die auch als z -Transformation bekannt ist. Dementsprechend werden auch im ersten Teil des vorliegenden Buches die offenen Abtastsysteme zunächst mit diesen Methoden behandelt. Dann führt Verf. einen Operator ζ ein, der mit z durch die Beziehung $\zeta = z - 1 = e^{T p} - 1$ verknüpft ist. Läßt man die Tasterperiode T gegen Null gehen, so führt man ζ in den Operator p des stetigen Systems über.

Im zweiten Teil werden die vorher gewonnenen Ergebnisse auf das Zeit- und Frequenzverhalten geschlossener Abtastsysteme angewandt. Daran schließt sich die Betrachtung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Stabilität von Systemen 1. bis 6. Ordnung an. Ein Abschnitt befaßt sich mit geschlossenen Abtastsystemen, die unter der Einwirkung von sehr schmalen und hohen Impulsen stehen.

Der dritte Teil ist mathematischen Hilfsmitteln gewidmet, die das Studium von Abtastsystemen erleichtern, wobei die Ausführungen über die ζ -Transformation hervorzuheben sind. Beschlossen wird das Werk mit Betrachtungen zur Optimierung.

Das Buch ist klar geschrieben und gibt einen schönen Einblick in die Theorie der Abtastsysteme und die durch den Autor erzielten Fortschritte. Es ist allen Ingenieuren, die auf diesem Gebiet arbeiten, wärmstens zu empfehlen.

Dresden

H. KINDLER

R. M. L. Baker, Jr. and **M. W. Makemson** (Department of Astronomy, University of California), An Introduction to Astrodynamics. XIV + 358 S. m. 47 Abb. New York und London 1960. Academic Press. Preis geb. \$ 7.50.

Wie uns mit jedem Start eines künstlichen Satelliten erneut demonstriert wird, ist jetzt auch die Himmelsmechanik eine Ingenieurwissenschaft geworden. Als solche wird sie zumindest in diesem Buch aufgefaßt, das „undergraduate students“, und zwar künftige Ingenieure und Physiker der Raumschiffahrt in die Astrodynamik einführen soll.

Im ersten der beiden Teile, in welche sich das Buch gliedert, werden auf etwa 100 Seiten die Grundlagen behandelt. Hier wird der Leser wirklich eingeführt, denn außer elementarsten mathematischen Kenntnissen wird nichts vorausgesetzt. Klassische Mechanik (soweit erforderlich), Geometrie der Kegelschnitte, astronomische Grundbegriffe usw., alles wird behandelt.

Der zweite etwa 200 Seiten umfassende Teil ist etwas weniger anspruchslos, aber immer noch leicht lesbar. Hier finden sich zunächst Abschnitte über die verschiedenen Methoden der Bahnbestimmung, das Mehrkörperproblem und die Störungstheorie. Die wichtigsten Beziehungen werden abgeleitet und eingehend erläutert. Rechenbeispiele wurden dagegen nicht aufgenommen, da Bahnrechnungen ja kaum noch mit der Hand, sondern fast ausschließlich mit programmgesteuerten elektronischen Maschinen durchgeführt werden. Ferner werden im zweiten Teil die für die Raumschiffahrt typischen Probleme behandelt: Antriebs- und Reibungskräfte, Beobachtung künstlicher Satelliten, interplanetare Bahnen von Raumschiffen usw. Zusammenstellungen der Fachausdrücke und der benutzten Symbole, ein Literaturverzeichnis und eine Reihe von Übungsaufgaben schließen den Band ab.

Die geschickte Darstellung und der klar gegliederte Aufbau lassen das Buch als Einführung auch für das Selbststudium geeignet erscheinen.

Kiel

G. TRAVING

A. A. Abramov, Tables of $\ln \Gamma(z)$ for Complex Argument. 331 S. Oxford/London/New York/Paris 1960. Pergamon Press. Preis geb. £ 5 5 s.

In übersichtlicher Anordnung sind in dieser Tafel (einer Übersetzung aus dem Russischen) sechsstellige Werte von $\ln \Gamma(z) = u + i v$ ($z = x + i y$) für $x = 1(0,01)2$ und $y = 0(0,01)4$ zusammengestellt, und zwar für jeweils einen Teilrechteckbereich u und v auf gegenüberliegenden Seiten. Der Fehler der vertafelten Funktionswerte beträgt höchstens $1 \cdot 10^{-6}$. Bei quadratischer Interpolation ist der Interpolationsfehler kleiner als $5 \cdot 10^{-7}$; hierfür sind in der Tafel geglättete zweite Differenzen in y -Richtung angegeben (die zweiten Differenzen in x -Richtung unterscheiden sich von diesen nur durch das Vorzeichen). Zur Erleichterung der Interpolation dient ein auf einem losen Blatt beigegebenes Nomogramm. In der Einführung sind einige Formeln zusammengestellt, die für die Berechnung von Funktionswerten außerhalb des gegebenen Rechteckbereichs für $x \geq 0$, $y \geq 0$ zu verwenden sind: Formel für die asymptotische Entwicklung, Multiplikationsformel (speziell für Argumentverdopplung), Rekursionsformel u. a. In vier Diagrammen sind für unterschiedliche Genauigkeitsansprüche (Fehler $< 5 \cdot 10^{-7}$; $r = 4, 5, 6, 7$) die Bereiche markiert, in denen zweckmäßig die genannten Formeln anzuwenden sind. Für $x < 0$, $y < 0$ ist die Spiegelungsformel zu benutzen, für die übrigen Bereiche die Beziehung $\ln \Gamma(z) = u - i v$.

Dresden

A. SCHUBERT

G. Köthe, Topologische lineare Räume I. XII + 456 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 78,—.

Bei diesem lang erwarteten Buch handelt es sich um ein wichtiges Standardwerk, in dem einer der auf dem vorliegenden Gebiet führenden Mathematiker die Grundbegriffe, Methoden und Ergebnisse der Theorie der topologischen Vektorräume systematisch darstellt. An Vorkenntnissen setzt das außerordentlich klar geschriebene Buch nur wenig voraus, ein ausführliches Inhalts-, Namen- und Sachverzeichnis erleichtern die Lektüre und das Nachschlagen. Zur näheren schnellen Orientierung dienen auch kurze Zusammenfassungen vor jedem Kapitel, und ein umfassendes Literaturverzeichnis ermöglicht es dem interessierten Leser, selbständig auf dem Gebiet weiterzuarbeiten.

Im einleitenden ersten Kapitel werden die wichtigsten Begriffe und Sätze aus der allgemeinen Topologie

angegeben, wobei auch die Beweise durchgeführt sind. Die ersten drei Paragraphen des nächsten Kapitels behandeln rein algebraisch die Eigenschaften von Vektorräumen über beliebigen (kommutativen) Körpern (Basis, Komplementärraum, Dimension, Defekt von Teilräumen, Produkt und direkte Summe von Vektorräumen, lineare Abbildungen und Matrizen in Vektorräumen beliebiger Dimension, Äquivalenztheorie, Eigenschaften des algebraisch dualen Raumes, Tensorprodukt von Vektorräumen), die letzten Paragraphen des Abschnitts sind der Theorie der linear-topologischen Räume gewidmet, wobei sich u. a. die volle Auflösungstheorie der zeilen- und spaltenfiniten Gleichungssysteme ergibt. Im nächsten Kapitel über topologische Vektorräume werden auch bekannte Verhältnisse der „klassischen“ Theorie erörtert (normierte Räume, lokalbeschränkte Räume, metrisierbare Räume, die fundamentalen Sätze von BANACH, BANACH-SCHAUDER und BANACH-STEINHAUS, bilineare Abbildungen, konvexe Mengen und Distanzfunktionen, die Trennung konvexer Mengen und der Satz von HAHN-BANACH). Die folgenden beiden Kapitel beschäftigen sich ausführlich mit den lokalkonvexen Räumen (induktiver und projektiver Limes lokal-konvexer Räume, (LB)-Räume und (LF)-Räume, Dualität und Polarität, die verschiedenen Topologien eines lokalkonvexen Raumes, bidualer Raum, Sätze über kompakte und konvexe Mengen usw.), der letzte Abschnitt des Buches behandelt einige spezielle wichtige Klassen lokalkonvexer Räume (tonnelierte Räume, MONTEL-Räume, bornologische Räume, (DF)-Räume, vollkommene Räume, Stufenräume und gestufte Räume). Hier ist besonders bemerkenswert der letzte Paragraph „Gegenbeispiele“, in dem das Komplementärraumproblem erörtert wird und verschiedene vorher offen gebliebene Fragen der allgemeinen Theorie durch Gegenbeispiele ihre Beantwortung finden.

Radebeul b. Dresden

M. LANDSBERG

A. Kratzer — W. Franz, Transzendente Funktionen. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Band 28.) XIII + 375 S. m. 58 Abb. u. 1 Tab. Leipzig 1960. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. Preis geb. DM 39,—.

Mit dem vorliegenden Werk ist die bekannte und beliebte Reihe des Verlages um einen neuen wertvollen Band erweitert worden. Er ist der hypergeometrischen Funktion und ihren Verallgemeinerungen sowie Spezialfällen wie beispielsweise den Kugel- und Zylinderfunktionen gewidmet, also den sogenannten Speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Dies hätte vielleicht auch im Titel zum Ausdruck gebracht werden sollen, zumal sich unter den betrachteten Funktionen ja auch Polynome befinden.

Die Funktionen werden als Lösungen ihrer Differentialgleichungen eingeführt, die Spezial- und Entartungsfälle der RIEMANNschen Differentialgleichung sind und aus der Wellengleichung durch Separation in elliptischen Koordinaten gewonnen werden. Die Eigenschaften der Funktionen werden einheitlich aus ihren Darstellungen durch komplexe Schleifenintegrale hergeleitet, wobei besonders den asymptotischen Eigenschaften ein breiter Raum gewidmet ist. Bei den asymptotischen Formeln (10), (10c), (29) und (29a) von § 7 wäre allerdings ein Hinweis auf eine einwandfreie Definition einer asymptotischen Darstellung bzw. Entwicklung angebracht, da sich die für nullstellenfreie Funktionen bekannte Definition nicht ohne weiteres auf Funktionen mit sich häufenden Nullstellen übertragen läßt, sondern die genaue Festlegung eines speziellen Koeffizientenbereiches erfordert. Das Literaturverzeichnis hätte etwas ausführlicher sein können, beispielsweise wurden die in der gleichen Reihe des Verlages erschienenen „Kugelfunktionen“ von J. LENSE nicht erwähnt.

Die Absicht der Verfasser war es, den Leser mit den für die Anwendungen der Mathematik in Physik und Technik so wichtigen Speziellen Funktionen so vertraut zu machen, daß er mit ihnen selbständig umgehen kann. Nach dem Studium des Buches wird der Leser die in den bekannten Formelsammlungen zusammengestellten Beziehungen besser verstehen und verwenden sowie im Bedarfsfall sich auch neue Beziehungen selbst herleiten können.

Halle/Saale

L. BERG

H.-J. Kowalsky, Topologische Räume: 271 S. m. 2 Abb. Basel 1961. Birkhäuser Verlag. Preis geb. sFr. 40.—.

In einer äußerst präzisen und interessanten Weise werden im vorliegenden Buch die Grundlagen der allgemeinen Topologie dargestellt. Die vorwiegend verbands- und filtertheoretisch gehaltene Darstellung gibt dem Buch seinen besonderen Charakter, wobei jedoch nach Ansicht des Referenten manches dem Lernenden — durch die oft sehr formale Terminologie — gewisse Schwierigkeiten bereiten dürfte. An Vorkenntnissen wird nur ganz wenig vorausgesetzt. Hinter jedem der 40 Paragraphen, aus denen sich die Kapitel des Buches zusammensetzen, befinden sich „Ergänzungen und Aufgaben“, die durch eine geschickte Auswahl den dargebotenen Stoff vertiefen und vervollständigen. Eine „Bezeichnungsübersicht“ und ein sehr ausführliches „Namen- und Sachverzeichnis“ erleichtern dem Leser die Lektüre des bemerkenswerten und in hervorragender Ausstattung erschienenen Werkes.

An ein einführendes Kapitel, das nach einer schönen Darstellung der Grundbegriffe der Mengenlehre ausführlich auf geordnete Mengen, Verbände und Filter eingeht, schließen sich 2 Abschnitte über topologische Räume (Topologie und Grenzwert, Ordnungstopologie und metrische Räume, Trennungssaxiome) und über die Begriffe „Kompaktheit“ und „Zusammenhang“ an. Das vierte Kapitel beschäftigt sich allgemein mit Abbildungen zwischen topologischen Räumen (topologische Abbildungen, vollständig reguläre Räume, Übertragung von Topologien, Quotientenräume, Produkträume), das folgende Kapitel befaßt sich speziell mit der Erweiterung von topologischen Räumen (Einpunkt-Kompaktifikation, WALLMANsche Erweiterung, STONE-ČECHsche Erweiterung, Einbettungs- und Darstellungssätze). Im sechsten Kapitel über metrische und uniforme Räume findet man u. a. die bekannten von den Mathematikern R. H. BING und Y. SMIRNOW und M. SMIRNOW gefundenen allgemeinen Metrisationssätze. Das letzte Kapitel des Buches gibt durch die kurze Behandlung diverser Fragestellungen (topologische Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume, Approximationssatz von STONE-WEIERSTRASS, induktiver und projektiver Limes) einen Ausblick auf weitere interessante und wichtige Anwendungen der Theorie.

Radebeul b. Dresden

M. LANDSBERG

M. Barner, Differential- und Integralrechnung, Band I: Grenzwertbegriff, Differentialrechnung. (Sammlung Götschen, Band 86/86a.) 176 S. Berlin 1961. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. DM 5,80.

Der vorliegende Band ist der erste von insgesamt vier Bänden über Differential- und Integralrechnung, die jetzt, anstelle der früher erschienenen Bände von WITTING, in der Sammlung Götschen erscheinen.

Im ersten Kapitel werden die reellen Zahlen gekennzeichnet als Elemente eines beschränkt vollständigen, angeordneten Körpers, wobei wegen eines Existenz- und Eindeutigkeitsbeweises selbstverständlich auf die

Literatur verwiesen wird. Sonst ist die Darstellung aber lückenlos und didaktisch einwandfrei. Es werden zunächst im zweiten Kapitel die wichtigsten Begriffe aus der allgemeinen Mengenlehre und der Punktmengenlehre eingeführt und einige grundlegende Sätze (BOLEZANO-WEIERSTRASS, HEINE-BOREL), alle für Mengen reeller Zahlen, bewiesen. Nachdem im dritten Kapitel der Begriff der reellen Funktion eines reellen Arguments allgemein erklärt wird, beschäftigt sich das vierte Kapitel mit den Folgen reeller Zahlen, wobei eine Folge reeller Zahlen als reelle Funktion über der Definitionsmenge der natürlichen Zahlen erklärt werden kann. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich dann mit dem Grenzwertbegriff bei Funktionen und mit dem Begriff der Stetigkeit. Die Logarithmusfunktion wird im sechsten Kapitel als die einzige reelle Funktion $L(x)$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x | x > 0\}$, die die Funktionalgleichung $L(x_1 x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ erfüllt und der Ungleichung $L(x) \leq x - 1$ genügt, und die Exponentialfunktion als deren Umkehrfunktion eingeführt. Im siebenten Kapitel werden die wichtigsten Sätze über differenzierbare Funktionen bewiesen, und im achten Kapitel werden die Winkelfunktionen, ausgehend von den Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ als einzige Lösung des Differentialgleichungssystems $C'(x) = -S(x)$, $S'(x) = C(x)$ unter den Anfangsbedingungen $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, eingeführt.

Der Verfasser spricht auf jeder Seite des Bandes eine äußerst klare und verständliche Sprache. Etwa 130 Übungsaufgaben (ohne Lösungen), die sehr sorgfältig ausgewählt wurden, regen den Leser zu aktiver Mitarbeit an. Das Buch sollte jeder Mathematikstudent im ersten Semester durcharbeiten, er würde es sicher mit großem Gewinn tun. Aber auch der Fachmann dürfte seine Freude an der Darstellung haben. Alles in allem: Ein Band, der der Göschensreihe alle Ehre macht.

Dresden

W. MAUERMANN

K. Klotter, Technische Schwingungslehre. Zweiter Band: Schwinger von mehreren Freiheitsgraden (Mehrläufige Schwinger). 2. umgearbeitete und ergänzte Auflage. XVI + 483 S. m. 296 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 58,50.

Nachdem der erste Band der „Technischen Schwingungslehre“ längst seinen festen Platz in der Fachliteratur gefunden hat, liegt nun auch der lange erwartete zweite Band vor. Behandelt werden lineare Schwinger mehrerer Freiheitsgrade. Nichtlineare und rheolineare Schwingungen wurden nicht mit aufgenommen, nachdem diese vom Verfasser in dem Band I bereits gebracht worden sind.

Das Buch gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil werden die Schwinger unter allgemeinen und systematischen Gesichtspunkten betrachtet. Da beim Aufbau des Buches im wesentlichen vom Standpunkt der Mechanik ausgegangen wurde, ist einleitend ein Kapitel über mechanisch-elektrische Analogie vorangeschickt. Nach einer grundsätzlichen Darlegung der synthetischen und analytischen Methoden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen folgen Kapitel über Schwingungen der freien ungedämpften Systeme von zwei und mehreren Freiheitsgraden. Hier, wie in allen Kapiteln, wird der Stoff anhand vieler Beispiele erläutert. Das vierte Kapitel geht mehr vom mathematischen Standpunkt aus. Es wird das zur Lösung der allgemeinen Schwingungsgleichungen Wichtige über die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten geboten. Die Kriterien der Stabilität der Lösungen werden erörtert und auch Systeme mit Dämpfung und allgemeiner Form der Kopplung behandelt. Das letzte Kapitel dieses ersten Teiles beschäftigt sich schließlich mit den erzwungenen Schwingungen ohne und mit

Dämpfung. Besonders wird dabei auf Schwingungstilger und auf das System Schiff-Schlingertank eingegangen.

Der zweite Teil ist nach technischen und praktischen Gesichtspunkten aufgebaut. Es werden zunächst eingehend die zahlreichen bisher bekannt gewordenen Verfahren zur Bestimmung der torsionskritischen Drehzahlen besprochen. Das letzte Kapitel des zweiten Teiles bringt ausführlich die Berechnung von Torsions-, Längs- und Biegeschwingungen masselastiger Wellen bzw. masseloser elastischer Wellen mit Einzelmassen mit Hilfe von Übertragungsmatrizen. Dieses Kapitel ist namentlich für den Praktiker von großem Wert und gibt ihm in gedrängter Form die Kenntnisse der Anwendung von Übertragungsmatrizen in die Hand, die er zur Durchführung der Schwingungsrechnung schwieriger Systeme braucht. Die Anwendung von Übertragungsmatrizen in der Schwingungstechnik bringt für den Ingenieur Vorteile, die erst durch das Arbeiten mit digitalen Rechenautomaten voll ausgenutzt werden können. Einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Matrizenmethode unter Anführung der modernen Arbeiten auf diesem Gebiete ergänzt das Kapitel und bildet den Abschluß des zweiten Bandes. In einem Anhang wird eine sehr nützliche Zusammenstellung gebracht, aus der die zur Berechnung von Schwingungsgebilden mit einem und mehreren Freiheitsgraden sowie von kontinuierlichen Gebilden erforderlichen Größen bzw. Eigenwerte ersichtlich sind.

Der Verfasser hat mit seiner nunmehr zweibändigen „Technischen Schwingungslehre“ ein Lehrbuch über die allgemeine und spezielle Behandlung von Schwingungssystemen dem Studierenden, Ingenieur und Schwingungsfachmann zur Verfügung gestellt, welches in seiner Ausführlichkeit und Eigenart der Darstellung zu den Standardwerken auf diesem Gebiet zählt.

Dresden

R. SCHMIDT

R. Schatten, Norm Ideals of Completely Continuous Operators. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 27). VIII + 81 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis brosch. DM 23,60.

Das vorliegende Büchlein des bekannten Autors befaßt sich mit einer Verallgemeinerung des Normbegriffs für die Algebra aller in einem HILBERT-Raum definierten Operatoren. Sei \mathfrak{A} ein Ideal dieser Algebra, so heißt eine reellwertige Funktion $\alpha = \alpha(A)$ von Operatoren $A \in \mathfrak{A}$ eine Norm, wenn gilt

1. $\alpha(A) \geq 0$; aus $\alpha(A) = 0$ folgt $A = 0$,
2. $\alpha(cA) = |c|\alpha(A)$ für jede komplexe Zahl c ,
3. $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.

Es ist zu erwarten, daß diese Verallgemeinerung des üblichen Normbegriffs auch in den Anwendungen der Funktionalanalysis, zum Beispiel bei Fehlerabschätzungen von Iterationsverfahren, erfolgreich eingesetzt werden kann. Besitzt das Ideal \mathfrak{A} noch gewisse Zusatzeigenschaften, so wird es als Normideal bezeichnet.

Die sehr knappe aber klare Darstellung setzt vom Leser voraus, daß er über die Grundbegriffe der Funktionalanalysis Bescheid weiß. In den ersten Abschnitten werden spezielle Klassen von Operatoren behandelt. Die dort bewiesenen Sätze sind noch wenig bekannt und gehen zum Teil auf den Autor zurück. Sie sollen die Behandlung der Normideale vorbereiten, sind aber auch für sich von Interesse. Zum Schluß nennt der Autor ein noch offenes Problem. Ein ausführliches Literaturverzeichnis vermittelt einen Überblick über die bisher erschienenen Beiträge zu dem behandelten Problemkreis.

Dresden

H. BIALY

G. Birkhoff, Hydrodynamics. A Study in Logic, Fact, and Similitude. Second edition, revised and enlarged. 184 S. m. 28 Abb. Princeton 1960. Princeton University Press. Preis geb. \$ 6.50.

Dieses eigenartige Werk — für dessen Bedeutung immerhin der Umstand spricht, daß seine 1. Auflage in die französische wie auch in die russische Sprache übersetzt wurde — wendet sich nach Ansicht des Referenten vor allem an Mathematiker, die auch für aerodynamische Fragen Interesse haben. Zu Beginn des Buches werden ein wenig willkürliche „plausible intuitive Hypothesen“ aufgestellt, deren Gültigkeit an den sog. Paradoxien der Strömungslehre (z. B. die D'ALMEBERTSche Paradoxie, der glatte Abschluß an ebenen Platten, der Umschlag der laminaren in die turbulente Grenzschicht) geprüft wird. Auch die in einem weiteren Kapitel für die ideale Flüssigkeit angeführten Beispiele von Freistrahlen, des Strömungs-Nachlaufes sowie der Kavitation werden vom Verfasser in die obigen Überlegungen einbezogen. An diese Kapitel schließt sich eine für den theoretischen Aerodynamiker beachtenswerte Darstellung der Dimensions-Analyse an; obwohl für das II-Theorem 6 Beispiele gebracht werden, befürchtet der Referent, daß die Wiedergabe des Stoffes zu kurz ist und im allgemeinen nur für den Mathematiker verständlich ist. In noch stärkerem Maße dürfte diese Bemerkung für den Abschnitt gelten, der sich mit der Anwendung der Gruppentheorie auf die NAVIER-STOKESSche Gleichung befaßt. Für eine spätere Auflage wäre eine ausgedehntere Behandlung, die sich auf rein strömungstheoretische Fragen beschränkt, sehr erwünscht, da die in dem Werk angeführten Erfolge (Separation der Veränderlichen, ja sogar Zurückführung der Gleichungssysteme auf Quadraturen) äußerst beachtenswert sind. So reizvoll eine unsystematische Darstellung auch sein kann, in dem Leser wird leicht die Frage erweckt, in welchem Ausmaß die Methode brauchbar ist. Das Buch schließt ein wenig unvermutet mit einem Abschnitt über die virtuelle Masse eines Körpers bei beschleunigten Bewegungen.

Berlin

W. BADER

Kybernetik. Zeitschrift für Nachrichtenübertragung, Nachrichtenverarbeitung, Steuerung und Regelung im Organismus und in Automaten. Band I, Heft 1. 56 S. m. 72 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis DM 12,80.

Das Fachgebiet Kybernetik verdankt seine Entstehung der Tendenz, Begriffe und Erfahrung aus dem physikalisch-technischen Sektor der Nachrichtenverarbeitung und der Steuerung auf biologische Vorgänge anwenden zu wollen. Andererseits haben Untersuchungen der Nervenphysiologie zu neuen Erkenntnissen über die in Organismen realisierten Prinzipien einer Nachrichtenübertragung geführt. So verbindet und befruchtet die Kybernetik weite Gebiete verschiedenster Wissenschaften.

Die neu gegründete Zeitschrift „Kybernetik“ will diese Verbindungen pflegen und insbesondere den Erfahrungsaustausch fördern. Für den mathematisch orientierten Leser bietet das vorliegende erste Heft zwei bemerkenswerte Beiträge. Der Artikel von K. KÜPFMÜLLER und F. JENK über die Nachrichtenverarbeitung in der Nervenzelle geht von drei Hypothesen über Grundeigenschaften von Nervenzellen aus. Das aus diesen Vorstellungen heraus entwickelte elektronische Modell bietet Möglichkeiten, die Eigenschaft der einzelnen Nervenzelle, selbst schon Informationen verarbeiten zu können, nachzuspielen.

Der Beitrag von K. STEINBUCH „Die Lernmatrix“ aus dem Gebiet der lernenden Automaten zielt auf Anwendungen bei automatischer Zeichen- und Spracherkennung sowie beim Wiederauffinden gespeicherter Informationen hin. Während Signale allgemein als

physikalische Tatbestände auftreten, sind Nachrichten im engeren solche Signale, deren Bedeutung bekannt ist, für die sich spezifische Reflexe gebildet haben. So zeichnet sich die Notwendigkeit einer semantischen Informationstheorie ab.

Jena

W. KÄMMERER

F. G. Tricomi, Differential Equations. X + 273 S. London 1961. Blackie & Son Ltd. Preis geb. 50 s.

Das bewährte Lehrbuch über gewöhnliche Differentialgleichungen erfährt durch die Übertragung ins Englische eine wohlberechtigte Anerkennung. Als Grundlage ist die zweite italienische Ausgabe verwendet worden. Unter dem bewußten Verzicht auf die Darstellung der klassischen Integrationsmethoden, die bereits in zahlreichen Büchern der Analysis behandelt sind, wird das Buch unmittelbar durch den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis von PICARD-LINDELÖF für normale Differentialgleichungssysteme eingeleitet. Im zweiten Kapitel befaßt sich der Autor mit den geometrischen Eigenschaften der Lösungskurven von Differentialgleichungen 1. Ordnung, in besonderer Ausführlichkeit mit ihrem Verhalten an den isolierten singulären Punkten und den periodischen Lösungen. Im Kapitel über Randwertprobleme für lineare Differentialgleichungen der Form $(p(x)y')' + P(x, \lambda)y = 0$ werden die Oszillations- und Nullstellensätze, die Eigenwerttheorie, die GREENSche Funktion bezüglich des STURM-LIOUVILLEschen Randwertproblems und die Beziehungen zur Integralgleichungstheorie behandelt. Ein besonders ausführliches Kapitel ist dem asymptotischen Verhalten der Lösungen linearer Differentialgleichungen und den asymptotischen Formeln für Eigenwerte und Eigenfunktionen gewidmet. Die allgemeine Theorie wird auf die LAGUERRESche und die LEGENDRESche Differentialgleichung und deren Polynomlösungen angewendet. Ein Kapitel über Differentialgleichungen im Komplexen und eine allgemeine Betrachtung der Gleichungen 2. Ordnung vom FUCHSSchen Typ, Anwendungen auf die konfluenten hypergeometrischen Funktionen und die BESSELSchen Funktionen schließen das Werk ab.

Das Buch zeigt einen klaren Aufbau und stellt die Probleme mathematisch tiefgehend und eindrucksvoll dar.

Freiburg/Sa.

A. KNESCHKE

F. M. Henderson, Elliptic Functions with Complex Arguments. V + 38 S. m. 80 S. Tafeln. Ann Arbor 1960. The University of Michigan Press. Preis geb. \$ 8.00.

Den Hauptteil des Bandes stellen Netztafeln und Zahlentabellen zur Ablesung der JACOBIschen elliptischen Funktionen und des elliptischen Integrals zweiter Gattung dar. Die Zahlentafeln werden erhalten, indem man die Funktionen vom komplexen Argument $u + iv$ auf Grund ihrer Additionstheoreme mit Hilfe der Funktionen vom reellen Argument u und Modul k sowie vom reellen Argument v und Modul k' darstellt. Die Funktionswerte der reellen Argumente wurden den zwölfstelligen Tafeln von SPENCELEY (Smithsonian Elliptic Functions Tables, Washington, D.C., 1947) entnommen und damit die Rechnungen auf einer IBM 650 ausgeführt.

Es wurden die Modulwerte $k = \sin 1^\circ$, $k = \sin 89^\circ$ und $k = \sin \alpha^\circ$ gewählt, wobei α alle durch 5 teilbaren Werte von $\alpha = 5$ bis $\alpha = 85$ durchläuft. Die Argumentbereiche sind $0 \leq u/K \leq 1$ und $0 \leq v/K' \leq 1$ mit Schritten von der Größe 0,1. Es sind stets vier gültige Ziffern angegeben. Die Netztafeln umfassen denselben Modul- und Argumentbereich. Sie bestehen

jeweils aus einer nach u/K und einer nach v/K' äquidistant bezifferten kartesischen Geradenschar und je einer (krummen) Kurvenschar $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$. Die Ablesemöglichkeit ist naturgemäß von beschränkter Genauigkeit, zumal die Interpolation in Netztafeln umständlich ausführbar ist. Sie könnte erleichtert werden durch ein transparentes Lineal, in das eine mit Graduierungsmarken verschiedenen Abstandes versehene Gerade eingeritzt ist. (Ein solches Lineal ohne Graduierung befindet sich z. B. in „Nomograms of Complex Hyperbolic Functions“, Copenhagen 1955, von JÖRGEN RYBNER).

Der Band wird ergänzt durch eine kurze Übersicht über die wichtigsten Eigenschaften der elliptischen Funktionen und Integrale und einige Abschnitte, die sich mit ihrer Anwendung bei der konformen Abbildung beschäftigen. Dies wird erläutert an Hand einiger Potentialprobleme, insbesondere aus der Hydrodynamik. Ein ausgeführtes Zahlenbeispiel zeigt, wie die Tafeln verwendet werden.

Somit gibt der vorliegende Band die Möglichkeit, bei nicht zu hohen Genauigkeitsansprüchen technische Aufgaben, bei denen elliptische Funktionen eines komplexen Arguments auftreten, einer zahlenmäßigen Lösung zuzuführen.

Die Ausstattung und die zeichnerische Darstellung sind gut.

Aachen

F. REUTTER

H. Wolf, Spannungsoptik. Ein Lehr- und Nachschlagebuch für Forschung, Technik und Unterricht. XIX + 582 S. m. 311 Abb., 1 Tafel u. 3 Tabellen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 66,—.

Neben den anderen vor kurzem in der Bundesrepublik erschienenen Büchern über Spannungsoptik ist dieses Werk im Umfang größer als die vorangegangenen Neuerscheinungen. Es ist offenbar die Absicht des Autors, nicht nur auf die üblichen Grundlagen der Spannungsoptik, sondern zum besseren Verständnis auf die physikalischen Zusammenhänge einzugehen. Neben den elastizitätstheoretischen Darstellungen findet man wesentliche Elemente der Kristalloptik, welche die Lichtfortpflanzung in optisch anisotropen Körpern veranschaulichen. Im Zusammenhang mit der Spannungsdoppelbrechung werden die sekundären Hauptspannungen bei dreiachsigen Spannungszuständen eingeführt. Dabei werden auch die Schwierigkeiten aufgezeigt, welche sich bei der Analyse eines ortsveränderlichen dreiachsigen Spannungszustandes in einem räumlichen Modell ergeben. Da das „Einfrierverfahren“ bisher am erfolgreichsten bei räumlichen Modellen angewendet wurde, hat die Technik dieses Verfahrens und die Auswertungsgesichtspunkte eine breite Darstellung gefunden. Ebenfalls findet man recht ausführlich die verschiedenen Auswertungsverfahren zur Bestimmung der Normalspannungen bei ebenen Spannungszuständen wiedergegeben.

Der spannungsoptischen Laborausrüstung und der allgemeinen Versuchstechnik ist ebenfalls ein breiter Raum gewidmet worden, so daß diese Richtlinien und die beschriebenen Polariscope, Kompensatoren, Belastungsapparaturen und auch die Werkstatthinweise recht nützlich bei der Ausgestaltung eines spannungsoptischen Laboratoriums sein können. — Weiterhin hat sich der Autor bemüht, bei der stofflichen Zusammenstellung die neueren Forschungsergebnisse weitgehendst zu berücksichtigen. Dabei hätte allerdings die dynamische Spannungsoptik eine noch eingehendere Behandlung erfahren können. Desgleichen sind die spannungsoptischen Plattenversuche zu kurz weggekommen. Dafür haben aber das Moiréverfahren und interferenzoptische Methoden, welche neben der Spannungsoptik zur experimentellen Spannungs-

analyse benutzt werden, Erwähnung gefunden. Auch findet man verschiedene numerische Methoden der angewandten Mathematik, so z. B. das Differenzenverfahren und die Relaxationsmethode, aufgeführt, welche bei spannungsoptischen Auswertearbeiten angewendet werden und somit den Charakter dieses Buches als Nachschlagewerk unterstreichen. Sieht man von einigen kleineren Fehlern ab, die leider z. T. sachlicher Natur sind, so ist diese Neuerscheinung wegen ihres hohen praktischen Wertes für alle, die sich mit Spannungsoptik beschäftigen bzw. in dieses Fachgebiet eindringen wollen, sehr zu empfehlen.

Essen

H. SCHWIEGER

D. Rüdiger und A. Kneschke, Technische Mechanik. Band 1. Statik starrer Körper. 324 S. m. 421 Abb. Leipzig 1960. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. DM 25,90.

Statik, Festigkeit, Kinetik, diese Drei; aber die Statik ist die schwerste unter ihnen. Ist das nicht der Seufzer jedes Studenten? Und die Erfahrung jedes Dozenten? Vielleicht weil sie zu einfach ist? Ein ganzes Semester lang ΣX , ΣY , $\Sigma M = 0$? So hat PARKUS in Wien das Problem neuerdings auf gordische Art gelöst: er streicht sie praktisch heraus. In Freiberg ist man dem Problem nicht ausgewichen. Vielleicht aber ist eine gute Statik (die ja zugleich einführen, aber auch das und jenes an „Praxis“ vermitteln soll) eine unlösbare Aufgabe? Die 300 Seiten des neuen Buches scheinen dem Ref. jedenfalls über das Ziel einer Einführung hinauszuschießen: Wozu 4 Seiten Einleitung? Warum das Parallelogramm erst als 1.7? Warum „Mittelkraftlinien“, da gleichzeitig das Seileck ausführlich dargestellt wird? Warum so viel Vektorformalismus, so viel „Linien“- und „Flächen“-Last? Soll man das Schwerpunkt-Kapitel mit Kugelkoordinaten belasten? Braucht man alle Fachwerkbeispiele? Uneingeschränkt nützlich scheint dem Ref. dagegen die ausführliche Behandlung der mehrteiligen Tragwerke mit ihren verschiedenen Abstützungsmöglichkeiten (auch das Prinzip der virtuellen Arbeit).

Das Reibungskapitel leidet, wie in jedem Mechanikbuch, an seinem Geburtsfehler: daß Reibung eine bei der Bewegung auftretende Kraft ist, und daher nicht in die Statik gehört. „Gleichgewichtsbetrachtungen bei Reibung“ ist keine glückliche Überschrift für das dann folgende Kapitel. Gemeint ist jetzt die „Haft-Reibung“ — wofür wir sogar vorschlagen würden, „Haftung“ zu sagen, was logischer und unmißverständlich ist.

Den Schnittkräften im Balken und Seil gelten die letzten fünfzig Seiten. Mit Recht wird immer wieder das Schnittprinzip hervorgehoben, wobei allerdings die Gegenüberstellung der Ausdrücke „Schnittverfahren“ (Gleichgewicht für das endliche Balkenstück) und „Differentialbeziehungen“ (Gleichgewicht für ein Element dx) unglücklich ist. Auch dürfte man nicht Lager und Lagerkräfte zeichnen: die Lagerkraft tritt doch erst in Erscheinung, wenn das Lager weg ist! Für die Behandlung der Mehrfeldträger würde der Ref. die Benutzung des so ungemein bequemen „FÖPPL-Symbols“

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{für } x > a \\ 0 & \text{für } x < a \end{cases}$$

empfehlen. Das letzte, besonders klare Kapitel ist dem Seil gewidmet.

Das Buch, offenbar unter dem Druck eines drängenden Bedürfnisses geschrieben, ist vielerorts ausgezeichnet, aber ganz sicher noch nicht in allen Teilen ausgereift. Die Ausstattung ist gut, die überaus markigen Stabwerksbilder haben den Vorteil der Einprägsamkeit.

Darmstadt

K. MARGUERRE

E. B. Dynkin, Theory of Markov Processes. Translated from the Russian by D. E. Brown, M. A. IX + 210 S. Oxford/London/New York/Paris 1960. Pergamon Press Ltd. Preis geb. 60 s.net.

Die Theorie der MARKOVprozesse hat sich im Verlauf der letzten Dekade vor allem durch die Arbeiten des Autors stark entwickelt, und dieses Buch enthält die erste systematische Darstellung des derzeitigen Standes dieser Theorie.

Im ersten Kapitel werden die im folgenden benötigten maßtheoretischen Begriffe und Sätze eingeführt, wobei allgemein bekannte Beweise weggelassen werden. Das zweite Kapitel enthält eine von der bisherigen Definition abweichende begriffliche Bestimmung MARKOVscher Prozesse. Sie beruht auf der Einführung von Prozessen, deren Verläufe in einem zufälligen Augenblick enden. Kapitel 3 führt den Begriff des Subprozesses ein, der im wesentlichen durch Verkürzung der Verläufe eines anderen Prozesses entsteht, und beschreibt die Erzeugung solcher Subprozesse. Kapitel 4 behandelt die Konstruktion von MARKOVprozessen, wenn die Übergangsfunktionen gegeben sind. In Kapitel 5 werden MARKOVprozesse im engeren Sinn definiert und untersucht. Das abschließende sechste Kapitel enthält Bedingungen für die Beschränktheit und Stetigkeit von MARKOVprozessen.

Die Darstellung des Gegenstandes ist rein maßtheoretisch und richtet sich an Leser, die bereits eine gewisse Vertrautheit mit stochastischen Prozessen im allgemeinen und MARKOVschen im besonderen mitbringen. Die zweifellos große Bedeutung dieser Publikation wird durch die Eile, mit der man diese englische Übersetzung im Photolithographieverfahren herausbrachte, nachdrücklich unterstrichen.

Wien

W. EBERL

W. Späth, Zahl — Maß — Bild. Grundfragen der Meßtechnik. 227 S. m. 129 Abb. Stuttgart 1960. Verlag A. W. Gentner KG. Preis geb. DM 29,50.

Bei sehr vielen naturwissenschaftlichen Prozessen, in engerem Sinne bei solchen physikalisch-technischer Natur, ergibt die zeichnerische Darstellung des Vorganges im gleichförmigen Netz (Millimeternetz) S-förmige Kurven. Wie SPÄTH ganz richtig angibt, führte der Wunsch, solche Kurven zu Geraden zu strecken dazu, daß HAZEN im Jahre 1914 die später HAZENSche Gerade genannte Ver Streckung der Summenhäufigkeitskurve, die ja auch eine solche S-Kurve ist, vorschlug. Da bei dieser Darstellung aus mathematisch bedingten Gründen die Werte 0% und 100% fehlen, schlägt SPÄTH ein von ihm entwickeltes Netz vor, das sogenannte „Arsita-Netz“ (arcus sin- und arcus tan-Teilung). An Hand zahlreicher, der wissenschaftlich-technischen Praxis entnommener Beispiele wird gezeigt, daß dieses dem Betriebspraktiker eine wertvolle Hilfe sein kann.

Es darf aber nicht verschwiegen werden, daß die auf S. 113 beschriebene Methodik der Ermittlung des Merkmalswertes sowie des Grenzwertes doch sehr der Willkür des Auswerters unterworfen ist, da beide mathematisch nicht definiert sind. Da die dargestellte Größe der Abszissenbereiche von Null bis Eins und von Eins bis Unendlich gleich lang ist, könnte die Bevorzugung des ersten beim Hindurchlegen der Ausgleichgeraden u. U. zu einer ungenauen Beurteilung führen. Auch daß die Übertragung von Diagrammen in das Arsitanetz „schleifende“ Schnitte ergibt (etwa Bild 75, 83, 89), könnte nach Ansicht des Ref. zu Fehlablesungen führen.

Ref. stimmt mit dem Autor völlig überein, daß bei Streckung des sich auf Grund eines technisch-wissenschaftlichen Zusammenhanges ergebenden Bildes zu einer Geraden sich diese Tatsache „auf die Rationalisierung der Forschung günstig auswirken“ wird. Ge-

rade dies verdient von der psychologischen Seite her stärkste Beachtung und wird dazu führen, daß sich viele Versuchsplaner des Arsita-Netzes gern bedienen werden.

Berlin-Friedrichshagen

J. FISCHER

K. Löffler, Die Berechnung von rotierenden Scheiben und Schalen. VIII + 241 S. m. 92 Abb., 4 Kurvenblättern u. 4 Formblättern als Anlage. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 42,—.

Die bei rotierenden Scheiben auftretenden Festigkeitsprobleme führten ursprünglich zu Berechnungsverfahren, die besonders für den Dampfturbinenbau zugeschnitten waren. Durch die Fortschritte des Gasturbinenbaues haben sich inzwischen andere Gesichtspunkte ergeben, wobei neue Scheibenformen (seitlich auskragende Ringe, ringförmig verteilte Bohrungen, radiale Rippen usw.) eine große Rolle spielen. Hierbei erwies es sich als notwendig, auf die Theorie der rotierenden Rotationsschalen beliebiger Form einzugehen. Wesentlich ist ferner, daß auch der Einfluß ungleichmäßiger Erwärmung, bzw. Kühlung zu berücksichtigen war. Verf. steht als Leiter der Abteilung für Triebwerksdynamik der Daimler-Benz AG. Stuttgart im Brennpunkt der Gasturbinen-Neuentwicklung und stellt mit seinem Buche eine Fülle geeigneter rechnerischer Verfahren zur Verfügung, die bereits in der Praxis weitgehend erprobt sind und sich mit gebräuchlichen Rechenautomaten durchführen lassen.

München

H. NEUBER

B. Eck, Technische Strömungslehre. 6., neu bearbeitete Aufl. XII + 453 S. m. 454 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 31,50.

Die Strömungslehre von ECK erscheint seit 1940 nahezu regelmäßig alle vier Jahre in Neuauflage. Nichts kann besser bezeugen, daß der Verfasser sein Ziel, dem Studierenden und dem praktisch arbeitenden Ingenieur die für die Technik wertvollen Ergebnisse der Strömungslehre in leicht verständlicher Form nahezubringen, voll und ganz erreicht hat. Dabei wird insbesondere die sechste Auflage durch eine weitgehende Neubearbeitung unter Heranziehung der bis 1959 vorliegenden Arbeiten dem letzten Stand der Erkenntnis gerecht. Fast in jedem Abschnitt sind Ergänzungen des Stoffes und Hinweise auf jüngere Forschungsergebnisse zu verzeichnen.

Unter den neu aufgenommenen Arbeiten findet man so interessante und praktisch wichtige Untersuchungen wie diejenigen von Iserland über die Drallwirkung freier Strahlen und von Ackeret und Sprenger über die Eigenschaften von Diffusoren. Überhaupt ist das die letztere Thematik einschließende Kapitel über Ablösung besonders stark ergänzt worden. Weiter sind in den Ausführungen über die pneumatische Förderung jetzt die Arbeiten von Segler und Barth berücksichtigt, die den Vorgang von der Ähnlichkeitstheorie her beleuchten. Obwohl in der Darstellung noch etwas knapp gehalten, wird nunmehr auch auf den für die weitere Flugzeugentwicklung wichtigen Strahlflügel eingegangen. So ließe sich die Zahl der Beispiele fortsetzen.

Bei alledem wurde der Umfang des Buches nach wie vor in Grenzen gehalten. Die Streichung von Überholtem und weniger Wichtigem ermöglichte es, mit einer Erweiterung um 31 Seiten auszukommen. Die Neuauflage hat im übrigen durch stärkere Herausarbeitung der Grundbegriffe und straffere Gliederung, die beide besonders dem Kapitel über Gasdynamik zugutekommen, in der Form gewonnen.

Dresden

G. CORDES

F. Hohenberg, Konstruktive Geometrie in der Technik. Zweite Aufl. IX + 319 S. m. 459 Abb. Wien 1961. Spring-Verlag. Preis geb. DM 29,—.

Vorliegendes Werk stellt die zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage der „Konstruktiven Geometrie in der Technik“ dar. Beim Ersterscheinen im Jahre 1956 wurde die Bedeutung des Buches bei allen Fachbesprechungen gebührend unterstrichen, stellt es doch die technischen Anwendungen der konstruktiven Geometrie ganz besonders in den Vordergrund (vgl. ZAMM 36 (1956), S. 476—477). Es ist staunenswert, wie rasch dieses ausgezeichnete Werk, das die Bedeutung geometrischer Konstruktionen auf allen Gebieten der technischen Anwendungen aufzeigt, sich durchgesetzt hat und in welcher kurzen Zeit auch eine zweite Auflage erforderlich wurde.

Gegenüber der Erstauflage sind eine ganze Reihe von Ergänzungen sowohl der Textstellen als auch der Abbildungen hinzugekommen, so daß das Buch in der zweiten Auflage um 47 Seiten stärker geworden ist und um 27 Abbildungen mehr aufweist. So sind Erweiterungen bzw. Ergänzungen hinzugekommen, z. B. bei den Abschnitten: Raumkollineation und Reliefperspektive, Einschnideverfahren in der Perspektive, Rohrkrümmer, Schraubtoren, Fräsen und Schleifen von Schraubflächen, Krümmung von Bahn- und Hüllkurven eines ebenen Zwanglaufes, Angehörte Geradführungen, Trochoiden. Neu aufgenommen wurden: Die WATTschen Kurven, Satz von ROBERTS (dreifache Erzeugung der Koppelkurve), Einige Trochoidenmaschinen (insbesondere der WANKEL-Motor).

Sehr zu begrüßen sind die ebenfalls neu aufgenommenen Übersichtsfragen am Schlusse jedes Kapitels, die dem Studierenden ermöglichen, sich selbst ein Urteil darüber zu bilden, wie weit er in den dargebotenen Stoff eingedrungen ist.

Sicherlich wird dieser 2. Auflage ein mindestens ebenso großer Erfolg beschieden sein wie der 1. Auflage.

Dresden

R. BEREIS

M. Neumann, Zur quantitativen Auswertung von Schlierenbildern rotationssymmetrischer Strömungen (Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 785). 52 S. m. 6 Tab. u. 6 Abb. Köln und Opladen 1961. Westdeutscher Verlag. Preis brosch. DM 15,30.

Über die verschiedenen Schlierenverfahren und speziell über das TOEPLERSche ist bereits umfangreiche Literatur vorhanden. Wenn der vorliegende Bericht nochmals auf 20 Seiten Grundlagen behandelt (grundsätzliche Definitionen, Erläuterungen des TOEPLERSchen Schlierenverfahrens, Theorie der Lichtablenkung), so werden damit eigentlich Eulen nach Athen getragen, und man liest diese Kapitel nur ihrer außerordentlich prägnanten und kurzen Formulierung halber. Die zweite Hälfte der Arbeit ist der mathematischen Grundlage für die quantitative Auswertung von Schlierenbildern rotationssymmetrischer Strömungen gewidmet.

Wird ein rotationssymmetrisches Schlierenobjekt senkrecht zu seiner Symmetrieachse in einer Schlierenaufnahmeeinrichtung durchleuchtet, so ist der Brechungsindex längs des Weges jedes Lichtstrahles veränderlich und die auf dem Schlierenbild erzeugte Schwärzung entspricht dem Integral der örtlichen Lichtablenkungen, genommen über den Lichtweg innerhalb des Schlierenobjektes. Ziel der Auswertung ist dann die Bestimmung der örtlichen Lichtablenkung oder genauer gesagt der örtlichen optischen Dichte als Funktion der radialen und axialen Koordinaten aus diesen Integralwerten. Mathematisch gesehen erfordert dies die Lösung je einer (ABELschen) Integralgleichung für die Lichtablenkung in radialer und

axialer Richtung. Der Verfasser führt die Lösung durch und erhält sie in expliziter Form. Für die numerische Berechnung gibt er ein tabellarisches Näherungsverfahren an, das er an einem konstruierten Beispiel vorführt.

Wer Schlierenbilder von rotationssymmetrischen Strömungen quantitativ auswerten möchte, kann den vorliegenden Forschungsbericht — soweit es die rechnerische Verarbeitung der aus Schlierenbildern erhaltenen Lichtablenkungen betrifft — als gebrauchsfertiges Hilfsmittel benutzen. Auf die naheliegende Frage nach der Bedeutung des mathematischen Teiles für das entsprechende Problem bei der Interferenzmethode wird leider nicht eingegangen.

Dresden

E. LINDNER

Proceedings of the Fifth Congress on Theoretical and Applied Mechanics and the Symposium on Non-linear Physical Problems, Roorkee — 1959. XI + 182 und 159 S. The Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics. Kharagpur, India.

Der Bericht über den Mechanik-Kongreß in Roorkee wird durch einen Vortrag des Präsidenten über Berechnung und Konstruktion eines weitgespannten Schalendaches eingeleitet, das für das Auditorium Maximum der Universität Roorkee bestimmt ist.

Die Einzelverträge der ersten Gruppe sind Problemen der angewandten und theoretischen Mechanik gewidmet. Hier findet man u. a. Arbeiten über die Biegung dünner Stäbe infolge des Eigengewichtes bei endlichen Verformungen, über die Stoßbeanspruchung zylindrischer Stäbe durch axiale Kräfte, über Wärmespannungen und über andere Probleme der Elastizitätstheorie und der Strömungslehre. Zur Lösung elastizitätstheoretischer Probleme werden hauptsächlich funktionentheoretische Methoden herangezogen, z. B. für Probleme, die sich auf die Halbebene oder auf die Torsion von dickwandigen Hohlquerschnitten beziehen. Aus der Strömungslehre findet man u. a. Untersuchungen über Strömungen im flachen Wasser und über Fragen, die mit der COUETTE-Strömung zusammenhängen.

Die zweite Gruppe von Vorträgen ist nichtlinearen Problemen der Physik gewidmet. Hier findet man u. a. einen zusammenfassenden Bericht über die technischen Kriechtheorien, über die endliche Durchbiegung von Kreisplatten infolge kreisringförmiger Belastung, über Probleme der inneren Ballistik, die mit Hilfe eines Digital-Rechners gelöst wurden, über ein nichtlineares Regelproblem bei Gasturbinen und über den Einfluß eines Magnetfeldes auf die Strömung zwischen nicht parallelen Wänden.

Der Bericht gibt einen guten Überblick über die Forschungen, die in den letzten Jahren in Indien auf dem Gebiet der Mechanik durchgeführt wurden. Leider ist der Druck oft nicht einwandfrei; auch wäre manche Arbeit besser zu verstehen, wenn sie mehr Abbildungen enthielte.

Eichwalde b. Berlin

A. WEIGAND

W. Epprecht, Werkstoffkunde der Kerntechnik. 407 S. m. 141 Abb. Basel/Stuttgart 1961. Birkhäuser Verlag. Preis geb. DM 57,50.

Es ist nicht leicht, kurz zu umreißen, was der Leser in diesem Buch findet. Leichter ist anzugeben, was er zwar vielleicht erwartet, aber nicht findet: Eine eingehende Behandlung der einzelnen im Reaktorbau angewandten Werkstoffe. Eine Übersicht über die Reaktorwerkstoffe nimmt weniger als 10% des Gesamtumfanges ein. Um mit dem Autor zu sprechen: „Der Hauptinhalt dieses Buches weicht somit bewußt von anderen Werkstoffbüchern ab, indem nicht wie üblich von den einzelnen Werkstoffarten

ausgegangen wird, sondern vielmehr von den Stoffeigenschaften, deren Ursprung und Veränderung unter Bestrahlung beschrieben und erklärt wird“.

Dementsprechend behandeln die beiden Hauptabschnitte die „Für den Reaktorbau wichtigen Eigenschaften der Materialien“ (ca. 170 Seiten) und „Die Wirkung der Reaktorstrahlung auf die Materialien“ (ca. 140 Seiten). Diese Teile bringen in leichtverständlicher Weise die physikalischen (einschließlich der kristallographischen) und chemischen (einschließlich der metallurgischen) Grundlagen für das Verständnis der Werkstoffeigenschaften.

Die Darstellung ist verhältnismäßig ausführlich, beispielsweise sind dem Abschnitt „Grundlagen der Festigkeiten“ 32 Seiten gewidmet, demjenigen über „Auf strahlungsbedingten Gitterstörungen beruhenden Veränderungen der Festkörpereigenschaften“ sogar 60. Um das Buch für eine sehr große, sowohl hinsichtlich der Richtung als des Niveaus der Ausbildung inhomogene Leserschaft verwendbar zu machen, werden dabei nur wenige Vorkenntnisse vorausgesetzt. Ein Literaturverzeichnis mit über 300 Titeln und ein sehr eingehendes Sachregister (28 Seiten!) erhöhen weiterhin die praktische Brauchbarkeit des Werkes.

Es erscheint dem Referent nicht zweifelhaft, daß das Buch für alle diejenigen, die sich technisch mit Reaktorwerkstoffen befassen und um ein tieferes Verständnis von deren Eigenschaften bemühen, schnell ein gern benutzter Ratgeber werden wird, zumal es vorzüglich ausgestattet ist.

Dresden

G. E. R. SCHULZE

W. Maak, Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. 376 S. m. 14 Abb. Göttingen 1960. Vandenhoeck & Ruprecht. Preis geb. DM 26,—.

Einige Besonderheiten heben dies neue Buch gegenüber dem bisherigen zahlreichen Schrifttum über den vorliegenden Titel hervor. In Teil I, Funktionen einer Veränderlichen, findet sich mit den Themen Grenzwertbegriff, stetige Funktionen, Differential- und Integralrechnung der üblicherweise gebotene Stoff. Teil II bezieht sich auf Funktionen mehrerer Veränderlicher und ist darauf eingestellt, in der allgemeinen STOKESformel, dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher, zu gipfeln. Die wohl erstmalige Darstellung dieses komplizierten Stoffes im Rahmen eines solchen Lehrbuches ist ausgezeichnet gelungen. In aller Ausführlichkeit werden erforderliche Hilfsmittel dargestellt: Differentiale längs Kurven, Kurvenintegrale, p -Vektoren und vor allem der wichtige Kalkül alternierender Differentialformen. Naturgemäß sind die Betrachtungen oft geometrischer Art und dabei ziemlich kompliziert (berandete Flächenstücke, Flächenintegrale); auch können nicht alle auftretenden Schwierigkeiten innerhalb dieser Darstellung geklärt werden, und die Durchführung des Beweises der STOKESintegralformel geschieht unter recht einschneidenden Voraussetzungen.

Behandelt wird auch das Iterationsverfahren in metrischen Räumen. Es führt auf den (bekannten) Fixpunktsatz für „Zusammenziehungen“. Darauf aufbauend werden Sätze über die Auflösung implizit gegebener Funktionen in ein- und mehrdimensionalen Fällen gewonnen.

Die spezielle Zielsetzung des Buches mit den zum Teil aufwandreichen Hilfsbetrachtungen erfordert Kürzungen an anderen Stellen. Z. B. beruht die (axiomatische) Definition des Rauminhaltes auf dem Begriff des JORDAN-Inhaltes, und somit gelangt der Integralbegriff über den von RIEMANN nicht hinaus

— ein schmerzlicher Verzicht bei einem modernen, „theoretischen“ Lehrbuch der Infinitesimalrechnung.

Die Darstellung ist höchst elegant und mit meisterhafter Klarheit und mathematischer Präzision geschrieben. Den allgemeinen theoretischen Erörterungen werden zum besseren Verständnis meist heuristische Überlegungen vorangestellt. Interessenten der „Reinen Mathematik“ sollten sich die genüßreiche Lektüre dieses vorzüglichen Buches mit seinen vielen neuartigen Betrachtungsweisen nicht entgehen lassen. Die wenigen Druckfehler sind unbedeutender Art; z. B. ist im Kleindruck auf S. 248 zweimal das Wort „Komponente“ durch „Koordinate“ zu ersetzen.

Dresden

P. H. MÜLLER

W. Macke, Elektromagnetische Felder. Ein Lehrbuch der Theoretischen Physik. XVI + 395 S. m. 166 Abb. Leipzig 1960. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig. Preis geb. DM 29,50.

In der sechsbändigen Reihe (Teilchen, Wellen, Quanten, Felder, Statistik, Relativität) des MACKESchen Lehrbuches der theoretischen Physik ist nach den „Wellen“ und „Quanten“ nun der Band „Elektromagnetische Felder“ erschienen. Dem Autor schwebt bei der Abfassung des Gesamtwerkes ein neues Prinzip der Stoffeinteilung vor, das, wie er im Vorwort zu dem Band „Wellen“ ausführt, durch die grundlegenden Konzeptionen Teilchen, Wellen, Quanten gegeben sein soll. Wenn man die Inhaltsverzeichnisse der verschiedenen Bände durchsieht, scheint im Endeffekt der Unterschied gegenüber der herkömmlichen Art der Stoffeinteilung gar nicht so groß zu sein. Es ist aber außerordentlich verdienstvoll, dem lernenden Physiker auf Schritt und Tritt vor Augen zu führen, daß es nur eine Physik gibt und daß es sich bei den verschiedenen Teildisziplinen immer nur um verschiedene Betrachtungsweisen handelt; erst die Berücksichtigung aller dieser Aspekte schafft die Möglichkeit, die physikalische Erscheinung in ihrer Totalität zu erfassen. Für den vorliegenden Band wirkt sich diese Tendenz konkret in zweierlei Hinsicht aus: Einmal werden im ersten Abschnitt auch die Grundbegriffe der Kontinuumsmechanik dargestellt, wobei dem Lernenden der Feldbegriff anschaulich nahe gebracht wird, zum anderen wird immer wieder an Hand eines sehr augenfälligen Schemas auf die Verflechtung der elektrischen und mechanischen Erscheinungen hingewiesen.

Um eine Übersicht über den Inhalt des Bandes zu geben, mögen die Überschriften der Kapitel aufgeführt werden: 1. Der Feldbegriff in Elektrizität und Mechanik. 2. Elektromagnetische Felder im Vakuum. 3. Elektrizität in Substanzen. 4. Magnetische Wirkungen elektrischer Ströme. 5. Induktion. 6. Zusammenspiel aller elektromagnetischen Erscheinungen. 7. Bewegte Bezugssysteme. — Das 5. Kapitel erfährt eine besondere Belebung durch die gedrängte Beschreibung der Wirkungsweise der Teilchenbeschleuniger. Im letzten Kapitel wird die spezielle Relativitätstheorie behandelt; es schließt mit der vierdimensionalen, invarianten Darstellung der elektromagnetischen Theorie. Eine größere Anzahl sehr instruktiver Übungsaufgaben ermöglicht dem Leser ein tieferes Eindringen in den Stoff.

Auch der hier besprochene Band zeigt, daß das MACKESche Lehrbuch, das für Physikstudenten und theoretisch interessierte Techniker und Ingenieure bestimmt ist, eine ausgezeichnete, allerdings nicht ganz einfache Einführung in die theoretische Physik bietet. Es ist ihm daher eine weite Verbreitung unter der studentischen Jugend zu wünschen!

Jena

K. SCHUSTER

A. Berroth und W. Hofmann, Kosmische Geodäsie. XIV + 356 S. m. 130 Abb. Karlsruhe 1960. Verlag G. Braun. Preis geb. DM 70,—.

Die verbesserte Beobachtungstechnik hat es in den letzten beiden Jahrzehnten ermöglicht, den Erdmond, der bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts zur nautischen Ortsbestimmung verwendet wurde, nunmehr auch zur geodätischen Ortsbestimmung heranzuziehen. Die Versuche haben um so größere Bedeutung, als es in naher Zukunft gelingen wird, künstliche Erdsatelliten auf eine für geodätische Zwecke günstige Bahn aufzulassen. Alle diese Versuche und Vorbereitungen für künftige Pläne haben eine Fülle von literarischem Niederschlag in den geodätischen und astronomischen Zeitschriften gefunden, der jedoch bisher nur für wenige Spezialisten zugänglich war.

Es ist ein außerordentliches Verdienst der Geodäten **BERROTH** und **HOFMANN**, daß sie durch ihr Lehrbuch dieses wichtige und zukunftsreiche Gebiet einer breiteren Schicht von Geodäten zugänglich gemacht haben. Das Buch gibt aber nicht nur einen übersichtlichen systematisch geordneten Einblick in all die vielen Einzelveröffentlichungen sowie eine kritische Wertung der einzelnen Verfahren. Es vermittelt vor allem auch die notwendigen astronomischen Kenntnisse aus der Theorie der Mondbewegung, der Theorie der Finsternisse, der Sphärischen Astronomie (Parallaxe, Zeitmaß u. a.) und aus einigen Kapiteln der Himmelsmechanik. So hat der Geodät, der sich diesem Spezialgebiet zuwenden will, alles notwendige Handwerkszeug beisammen und wird nur in Ausnahmefällen auf die eine oder andere Spezialarbeit des außerordentlich reichen Literaturverzeichnis in Original zurückgreifen müssen.

Das behandelte Gebiet ist so neu, daß die Verfasser sogar den Namen dafür noch wählen konnten. „Kosmische Geodäsie“ dürfte allseitige Zustimmung finden, da „Astronomische Geodäsie“ bereits fest vergeben ist und „Kosmische Triangulation“ einen Teil der elektronischen Satellitenbeobachtungsverfahren nicht mit erfassen würde. Mit anderen Vorschlägen zur Nomenklatur waren die Verfasser nicht so glücklich, so versteht der Astronom „interstellar“ dreidimensional, während der Ausdruck im vorliegenden Werk für ein zweidimensionales Problem vorgeschlagen wird.

Die umfassende und tiefeschürfende Bearbeitung des Gebietes, die an mehreren Stellen auch in einer eigenen Darstellung des angeschnittenen Problems ihren Niederschlag gefunden hat, ist ein zuverlässiger Führer durch die komplizierte und abseits liegende Materie. Für die instruktiven Abbildungen und die ansprechende Ausstattung des Werkes wird der Leser den Verfassern und dem Verlag dankbar sein.

Dresden

H.-U. SANDIG

W. Rinow, Die innere Geometrie der metrischen Räume. XVI + 520 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 83,—.

Ist die Auswahl an Lehrbüchern über allgemeine Topologie, topologische und insbesondere auch metrische Räume recht reichhaltig, so schließt dies neue Buch eine sehr wichtige Lücke in der Fachliteratur, im besonderen für den deutschsprachlichen Leserkreis. Von der enormen Stofffülle, die in 10 Kapiteln, 54 §§ und 242 Absätzen eine in der Hauptsache vollständige Behandlung des Gebietes (bei Abgleichung an die vorhandenen einschlägigen Bücher von **ALEXANDROW**, **BLUMENTHAL** und **BUSEMAN**) bringt, können hier nur stichwortartig die einzelnen Kapitel mit einigen ihrer wichtigsten Themen und Begriffe genannt werden. — Kapitel I macht den Leser mit Hilfsmitteln der metrischen Geometrie und allgemeinen Topologie vertraut (im besonderen auch **HAUSDORFF**-Limes, **BUSEMAN**sche und **HAUSDORFF**sche Metrik). — Kap. II: Stetige Abbildungen (Kurven, Flächen). —

Kap. III: Innere Metrik (Länge einer Kurve, innere Metrik, innere Geometrie, **FINSLER**sche Räume = topologische Mannigfaltigkeiten mit Differenzierbarkeitsstruktur und Bogenelement).

Wir erläutern bei dieser Gelegenheit folgende grundsätzlich wichtigen Begriffe. Innere Metrik $\rho_i(x, y) = \text{Infimum der Längen aller die beiden Punkte } x, y \text{ verbindenden Kurven}$. Ein Raum R mit der Metrik $\rho(x, y)$ heißt ein Raum mit innerer Metrik, wenn $\rho_i(x, y) = \rho(x, y)$ für alle $x, y \in R$ gilt. Das Studium solcher Räume ist der Hauptinhalt des vorliegenden Buches. R, R' seien Räume mit innerer Metrik, C eine Kurve in R und Φ eine stetige Abbildung von R in R' . $L(C), L(\Phi(C))$ bezeichnen die zugehörigen Kurvenlängen. Φ heißt längentreu, falls $L(C) = L(\Phi(C))$ gilt. R, R' heißen längeninvariant oder innergeometrisch äquivalent, wenn es eine beiderseits längentreue Abbildung von R auf R' gibt. Die Theorie der Invarianten bei beiderseits längentreuen Abbildungen ist die innere Geometrie metrischer Räume.

Kap. IV: Theorie der Kürzesten (Kürzeste zwischen a, b : Rektifizierbare Kurve K zwischen a und b , so daß $L(K) \leq L(C)$ gilt für alle a und b verbindenden rektifizierbaren Kurven C ; Existenzsätze, Konvexität, Geodätische). — Kap. V: Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume (Homotopie). — Kap. VI: Existenzsätze für geodätische Kurven (Komplexe, Polxeder, **SPERNER**sches Lemma und Anwendungen). — Kap. VII: Theorie der Krümmung (Winkelbegriff in metrischen Räumen, Räume beschränkter Krümmung, **RIEMANN**sche Krümmung). — Kap. VIII: Das **CLIFFORD-KLEIN**sche Raumformenproblem (= Bestimmung aller Mannigfaltigkeiten konstanter **RIEMANN**scher Krümmung). — Kap. IX: Räume der Krümmung ≤ 0 . — Kap. X: Sphäroide und Räume vom elliptischen Typ. —

Das Buch besitzt durchweg gehobenes Niveau. Vom Leser werden an Vorkenntnissen analytische und Differentialgeometrie, Gruppentheorie und einige Tatsachen über reelle Funktionen erwartet; darüber hinaus aber ist der Stoff ausführlich und gut verständlich dargelegt. Im ganzen handelt es sich um ein hervorragendes, geradezu monumentales Standardwerk. Wünschenswert für eine erleichterte Benutzung beim Nachschlagen erscheint eine Zusammenstellung der Bezeichnungen und ein ausführlicheres Sachverzeichnis.

Dresden

P. H. MÜLLER

Handbuch der Physik, Band XI/Teil 1: Akustik I. VI + 443 S. m. 183 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 128,—.

Der vorliegende Band enthält folgende fünf Beiträge: Linear Acoustic Theory by **PHILIP M. MORSE** and **K. UNO INGARD**, Schallabsorption und -dispersion in Gasen von **HANS O. KNESE**r, Schallabsorption und -dispersion in wäßrigen Elektrolytlösungen von **KONRAD TAMM**, Dispersion and Absorption of Sound Waves in Liquids and Mixtures of Liquids by **DANIELE SETTE**, Dispersion and Absorption of Sound in High Polymers by **WARREN P. MASON**.

Im Beitrag von **MORSE** und **INGARD** werden zunächst aus den thermo-hydrodynamischen Grundgesetzen die Differentialgleichungen der linearen Akustik für ein fluides Medium abgeleitet. Die Erörterung der physikalischen Situation an den Grenzen des Mediums führt zu einer grundsätzlichen Unterscheidung von zwei Typen akustischer Systeme, einfacher und gekoppelter, je nachdem, ob sich die Randbedingungen des Schallfeldes mit Hilfe einer akustischen Wandimpedanz formulieren lassen oder nicht. Weiterhin wird die für die Schallfeldfunktion geltende Integralgleichung betrachtet, die sich für die Behandlung von Problemen der Schallerzeugung und der Schallstreuung als außerordentlich nützlich er-

weist. Die folgenden Abschnitte sind der Untersuchung spezieller akustischer Systeme gewidmet, wobei außer den Strahlungs- und Beugungsproblemen vielfach Fragen diskutiert werden, die für die moderne Technik von besonderem Interesse sind, wie die Schallausbreitung in Rohrleitungen und die Schallerzeugung in turbulenten Strömungen. — Den Verfassern ist es in hervorragendem Maße gelungen, dem Leser auf nur 128 Seiten die wesentlichen Züge der Theorie der linearen Akustik in strenger Form zu vermitteln. Sie haben das große Verdienst, durch Einführung moderner mathematischer Methoden der klassischen Akustik ein neues Gesicht gegeben zu haben. Nur so und durch eine drastische Beschränkung der Beispiele war die erstrebte äußerste Konzentration möglich. Gerade dem angewandten Mathematiker wird die Lektüre dieses Beitrages ein ästhetischer Genuß und eine reiche Quelle von Anregungen sein.

In den folgenden vier Beiträgen kommt die „Molekulare Akustik“, die die auf Relaxationserscheinungen beruhende Schalldispersion und -Absorption zum Inhalt hat, auf 289 Seiten zu Worte. Der Umfang dieser Beiträge ist ein Ausdruck für die rasante Entwicklung, die dieses Gebiet, das die akustische Meßtechnik im Dienste der Erforschung molekularer Strukturen und Reaktionen zeigt, in den letzten

Jahren erfahren hat. Auch jeder dieser vier Beiträge würde eine ausführliche Würdigung verdienen. Da aber die hier aufgeworfenen Fragen den angewandten Mathematiker nicht so unmittelbar angehen, sei es mir gestattet, mich kurz zu fassen: KNESER stellt nach einer einleitenden Übersicht sowohl die thermohydrodynamische wie die kinetische Theorie der molekularen Absorption und Dispersion in Gasen dar. Es folgen Abschnitte über die experimentellen Methoden und die erzielten Ergebnisse. Der Beitrag schließt mit einer Darlegung der Theorie der Relaxationszeiten. — In analoger Weise behandeln TAMM, SETTE und MASON die theoretischen und experimentellen Untersuchungen der Schalldispersion und -Absorption in wäßrigen Elektrolytlösungen, in Flüssigkeiten und Flüssigkeitsgemischen und schließlich in Hochpolymeren. Der Artikel von SETTE enthält darüber hinaus einen Abschnitt über die Abhängigkeit der Geschwindigkeit niederfrequenten Schalles von der chemischen und strukturellen Natur der Flüssigkeiten.

An dem vorliegenden Band, der als Standardwerk wieder eine ungeheure Fülle von Forschungsergebnissen enthält, wird jeder seine Freude und seinen Nutzen haben, der sich mit theoretischer oder molekularer Akustik beschäftigt!

Jena

K. SCHUSTER

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

W. Albring, Angewandte Strömungslehre. XII + 380 S. m. 438 Abb. Dresden und Leipzig 1961. Verlag von Theodor Steinkopff. Preis geb. DM 43,—.

G. V. Lachmann, Boundary Layer and Flow Control. Its Principles and Application. Volume 1. XII + 600 S. m. 417 Abb. Oxford/London/New York/Paris 1961. Pergamon Press. Preis geb. £ 10.10 s. net.

Gröbner — Erk — Grigull, Grundgesetze der Wärmeübertragung. Dritte neubearbeitete Auflage. VIII + 430 S. m. 190 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 37,50.

T. Y. Thomas, Plastic Flow and Fracture in Solids (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 2). IX + 267 S. m. 19 Abb. New York/London 1961. Academic Press. Preis geb. \$ 8.50.

A. L. Jaumotte — A. M. Rothrock — A. H. Lefebvre, Combustion and Propulsion. Fourth Agard Colloquium. High Mach Number Air-Breathing Engines. XIX + 396 S. m. 208 Abb. Oxford/London/New York/Paris 1961. Pergamon Press. Preis geb. £ 5.5.0.

E. Stiefel, Einführung in die numerische Mathematik. 234 S. Stuttgart 1961. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. DM 24,80.

K. Steinbuch, Automat und Mensch. Über menschliche und maschinelle Intelligenz. VIII + 253 S. m. 92 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. 28,50.

G. N. Savin, Stress Concentration around Holes. XI + 430 S. m. 208 Abb. u. 77 Tafeln. Oxford/London/New York/Paris 1961. Pergamon Press. Preis geb. 84 s. net.

P. B. J. Gravina, Theorie und Berechnung der Rotationsschalen. XII + 308 S. m. 101 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 43,50.

B. Fritz, Verbundträger. Berechnungsverfahren für die Brückenbaupraxis. XII + 149 S. m. 82 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961. Springer-Verlag. Preis geb. DM 31,50.

J. W. Linnik, Die Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung. IX + 314 S. m. 12 Abb., 30 Tab., 6 Taf. Berlin 1961. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. DM 39,80.

NACHRICHTEN

Herrn Prof. Dr. Robert SAUER, München, wurde am 6. 10. 1961 von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität Dresden in Anerkennung seiner hervorragenden Verdienste um die Entwicklung der theoretischen Gasdynamik die Würde eines Doktor-Ingenieurs ehrenhalber verliehen.

H.

Der als einer der erfahrensten Schiffbaukonstrukteure im In- und Ausland bekannte Ordinarius auf dem Lehrstuhl für Schiffbau an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule in Aachen und Direktor der Versuchsanstalt für Binnenschiffbau in Duisburg, Professor Dipl.-Ing. WILHELM STURTZEL, beging am 9. 8. 1961 in Duisburg seinen 65. Geburtstag.

H.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr.-Ing. habil. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4; Fernsprecher: 22 04 41. Telex-Nr. 011 773. Postcheckkonto: Berlin 350 21. Bestellnummer dieses Heftes: 1009/41/10-11. Die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,—. Zuzüglich Bestellgeld. Doppelheft DM 10,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer ZLN 5011 des Ministeriums für Kultur. Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza (V/12/6) (1). Printed in Germany.

Dr. HERBERT BENZ

Über eine Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik

(Schriftenreihe der Institute für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 9)

1961. 149 Seiten — 5 Abbildungen — gr. 8° — DM 29,50

Für die Theorie der algebraischen Zahlen gibt es zwei wesentlich verschiedene Begründungsweisen, die idealtheoretische, die auf Dedekind zurückgeht, und die divisorentheoretische, die auf Grund der p -adischen Methode von Hensel entwickelt und dann durch die Bewertungstheorie von Ostrowski u. a. unterbaut wurde.

In dieser Arbeit wird eine konsequente divisorentheoretische Begründung der Arithmetik (der Maximalordnungen und auch anderer Ordnungen) einer algebraischen Algebra A gegeben und durch eine Bewertungstheorie unterbaut.

Das Buch ist so geschrieben, daß es auch von Nichtkennern der gewöhnlichen Bewertungstheorie gelesen werden kann.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK GAMM-Tagungsheft 1960

1960. 156 Seiten — 83 Abbildungen — 4° — DM 15,—

In diesem GAMM-Sonderheft sind die Haupt- und Kurzvorträge enthalten, die auf der vorjährigen Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik in Freiberg/Sachsen gehalten wurden.

Sie beschäftigen sich mit den Gebieten Angewandte Mathematik, Rechentechnik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Mechanik, Elastizitätslehre und Strömungslehre.



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N

Aus dem wissenschaftlichen Briefwechsel Wilhelm Ostwalds

1. Teil

Briefwechsel mit Ludwig Boltzmann, Max Planck,
Georg Helm und Josiah Willard Gibbs

Herausgegeben von Dipl.-Met. Hans-Günther Körber unter Mitwirkung von Grete Ostwald

1961. XXIV, 143 Seiten — 18 Tafeln — 1 Titelbild — gr. 8° — Ganzleinen DM 19,50

Wilhelm Ostwald (1853—1932), der zusammen mit Jacobus Henricus van't Hoff und Svante Arrhenius die klassische physikalische Chemie begründete und der darüber hinaus als hervorragender Farbenforscher und als namhafter Vertreter damaliger kultur- und naturphilosophischer Anschauungen weitreichenden Einfluß gewann, stand in einem ausgedehnten Briefwechsel mit bedeutenden Gelehrten und Zeitgenossen seiner Epochen. Aus der umfangreichen Handschriftensammlung des Forschers, die sich im Besitz des Wilhelm-Ostwald-Archivs der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin in Großbothen (Sachsen) befindet, werden in dieser Briefausgabe erstmalig wichtige Korrespondenzen Ostwalds veröffentlicht, und zwar im vorliegenden 1. Teil der Briefwechsel mit den theoretischen Physikern Ludwig Boltzmann, Max Planck und Josiah Willard Gibbs und dem Mathematiker Georg Helm. Darin kommen vorwiegend Fragen der Thermodynamik, wie Gültigkeit und Anwendbarkeit der thermodynamischen Hauptsätze und darauf basierende Vorstellungen aus der Energetik Ostwalds zur Sprache. Die in den letzten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts geschriebenen Briefe geben nicht nur einen interessanten Einblick in die Zeit des Überganges von der klassischen zur modernen Physik, sondern vermitteln zugleich ein lebendiges Bild der betreffenden Forscherpersönlichkeiten und der menschlichen Beziehungen, die zwischen ihnen bestanden.

Der mit einer Einleitung, Anmerkungen und Register versehene Band wendet sich hauptsächlich an Physiker, Chemiker und alle an der Geschichte der Naturwissenschaften interessierten Leser.

Im zweiten, in Vorbereitung befindlichen Teil der Ausgabe werden die Korrespondenzen Ostwalds mit S. Arrhenius und J. H. van't Hoff gebracht.



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N